Classe de terminale S_5

Corrigé du DS 16

Exercice 1 (5,5 points)

Le but de l'exercice est l'étude de la suite définie par $u_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$

1) *f* définie par $f(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ est dérivable sur ℝ, et la fonction $u : x \to x+\sqrt{1+x^2}$ a pour dérivée $u' : x \to 1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}$ par composition. On a donc pour tout réel *x* $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Par suite $u_0 = \int_0^1 f'(x)dx = f(1)-f(0)$, c'est-à-dire $u_0 = \ln(1+\sqrt{2}) - \ln(1) = \ln(1+\sqrt{2})$ **(1 point)**

   $u_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$, et comme $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$ est de la forme $\frac{v'(x)}{2\sqrt{v(x)}}$, on peut écrire $u_1 = \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 = \sqrt{2}-1$ **(0,5 point)**

2) Pour tout entier *n*, $u_{n+1}-u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}}dx - \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^1 \frac{x^{n+1}-x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}}dx$. Comme pour tout *x* de [0 ; 1] x^n et $\sqrt{1+x^2}$ sont positifs et que *x* – 1 est négatif, $\frac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}}$ est négatif sur [0 ; 1]. Par positivité de l'intégrale, $\int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{\sqrt{1+x^2}}dx$ est négatif pour tout entier *n*, et la suite (u_n) est décroissante. **(0,5 point)**. Comme $\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}$ est positif sur [0 ; 1], par positivité de l'intégrale u_n est positif pour tout entier *n*. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente. **(0,25 point)**

   Pour tout *x* de [0 ; 1], on a $1 \le x^2+1 \le 2$ donc $1 \le \sqrt{x^2+1} \le \sqrt{2}$, les fonctions carré et racine étant croissantes sur [0 ; +∞[**(0,5 point)**. On a donc pour tout *x* de [0 ; 1] et pour tout entier *n* $\frac{x^n}{\sqrt{2}} \le \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \le \frac{x^n}{1}$ (la fonction inverse est décroissante sur]0 ; +∞[, puis on multiplie par le réel positif x^n), et par comparaison d'intégrales, pour tout entier *n* $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{2}}dx \le \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx \le \int_0^1 x^n dx$.

   Comme $\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$, et $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{2}}dx = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}}$ on a bien pour tout entier *n* $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \le u_n \le \frac{1}{n+1}$ **(0,5 point)**. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} = 0$, d'après le théorème des gendarmes (u_n) a pour limite 0 **(0,25 point)**

3) On pose maintenant pour $n \geqslant 3$ $I_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}dx$

Soit $n \geqslant 3$: $u_n + u_{n-2} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n-2}}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^1 x^{n-2} \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{x^2+1} dx = I_n$ **(0,25 point)**

Faisons une intégration par parties sur I_n : les fonctions $u : x \to \sqrt{1+x^2}$ et $v' : x \to x^{n-2}$ sont dérivables et pour tout x, $u'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $v(x) = \frac{1}{n-1}x^{n-1}$, on a donc pour tout $n \geqslant 3$

$I_n = \left[\frac{x^{n-1}\sqrt{1+x^2}}{n-1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{n-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{\sqrt{2}}{n-1} - \frac{1}{n-1}\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$, soit $I_n = \frac{\sqrt{2} - u_n}{n-1}$. Compte tenu de $I_n = u_n + u_{n-2}$, on obtient $(n-1)(u_n + u_{n-2}) = \sqrt{2} - u_n$ et par conséquent $nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}$ **(0,75 point)**

(u_n) étant décroissante, pour tout $n \geqslant 3$ $u_{n-2} \geq u_n$, donc $(2n-1)u_n \leq nu_n + (n-1)u_{n-2}$, ce qui, compte tenu de la question précédente, donne $(2n-1)u_n \leq \sqrt{2}$. **(0,25 point)**

On a donc, d'après les questions 2) a) et 3 b), pour tout $n \geqslant 3$, $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2n-1}$, donc

$\frac{n}{(n+1)\sqrt{2}} \leq nu_n \leq \frac{n\sqrt{2}}{2n-1} \Leftrightarrow \frac{n}{n(1+\frac{1}{n})\sqrt{2}} \leq nu_n \leq \frac{n\sqrt{2}}{n(2-\frac{1}{n})} \Leftrightarrow \frac{1}{(1+\frac{1}{n})\sqrt{2}} \leq nu_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2-\frac{1}{n}}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D'après le théorème des gendarmes, la suite (nu_n) est convergente de limite $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(0,75 point)**

Exercice 2) (4,5 points)

1) Dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ on a $O(0;0;0)$, $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$.
   G est l'isobarycentre de ABC donc ses coordonnées sont données par :
   $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{1+0+0}{3} = \frac{1}{3}$, $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{1}{3}$, $z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{1}{3}$. **(0,5 point)**
   On a de plus $\overrightarrow{OG}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right), \overrightarrow{AB}(-1;1;0), \overrightarrow{AC}(-1;0;1)$ donc $\overrightarrow{OG}\bullet\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OG}\bullet\overrightarrow{AC} = 0$ et (OG) orthogonale aux deux sécantes (AB) et (AC), est orthogonale au plan (ABC) **(0,5 point)**
2) $\vec{n}(3;3;2), \overrightarrow{A'B'}(-2;2;0), \overrightarrow{A'C'}(-2;0;3)$ donc $\vec{n}\bullet\overrightarrow{A'B'} = 0, \vec{n}\bullet\overrightarrow{A'C'} = 0$ et $\vec{n}$, orthogonal aux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'C'}$ est orthogonal au plan $(A'B'C')$ **(0,5 point)**
   Le plan $(A'B'C')$ est donc le plan orthogonal à $\vec{n}$ passant par A', et $M(x,y,z)$ lui appartient si et seulement si : $\overrightarrow{A'M}\bullet\vec{n} = 0 \Leftrightarrow 3(x-2)+3(y-0)+2(z-0) = 0$.
   $3x+3y+2z-6=0$ est donc une équation du plan $(A'B'C')$ **(0,5 point)**
   $M(x,y,z)$ appartient à (AC) si et seulement si $\overrightarrow{AM}(x-1,y,z)$ et $\overrightarrow{AC}(-1;0;1)$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et ssi il existe un réel t tel que $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$ **(0,5 point)**
   Pour rechercher l'intersection de (AC) et de $(A'B'C')$ on substitue dans l'équation de $(A'B'C')$ l'expression paramétrique des coordonnées des points de (AC), on obtient :

$3(1-t)+2t-6=0 \Leftrightarrow t=-3$, soit $K(4;0;-3)$ **(0,5 point)**

3) Il est clair que $L(0;4;-3)$ vérifie $3x+3y+2z-6=0$, équation de (*A'B'C'*). En outre, $\overrightarrow{BL}(0;3;-3)$ et $\overrightarrow{BC}(0;-1;1)$ sont colinéaires donc L est bien le point d'intersection de (*BC*) et de (*A'B'C'*) **(0,5 point)**

   On a $\overrightarrow{AB}(-1;1;0)$, $\overrightarrow{A'B'}(-2;2;0)$ et $\overrightarrow{KL}(-4;4;0)$. Ces trois vecteurs sont colinéaires donc les droites (*AB*), (*A'B'*) et (*KL*) sont parallèles **(0,25 point)**

   Les points *K* et *L* appartiennent tous deux au plan (*ABC*) et au plan (*A'B'C'*), ces deux plans ne sont pas confondus donc leur intersection est la droite (*KL*) **(0,25 point)**

4) La droite passant par *O*, orthogonale au plan (*A'B'C'*) est dirigée par $\vec{n}$, elle a donc pour système d'équations paramétriques $\begin{cases} x=3t \\ y=3t \\ z=2t \qquad (t\in\mathbb{R}) \end{cases}$. Son point d'intersection *H* avec (*A'B'C'*) est le projeté orthogonal de *O*, son paramètre vérifie $3\times 3t+3\times 3t+2\times 2t-6=0$, soit $t=\frac{3}{11}$, et $H(\frac{9}{11},\frac{9}{11},\frac{6}{11})$ **(0,5 point)**

Problème (10 points)

Partie A (1,5 point)

(E) est l'équation différentielle $y''-y=0$.

1) Si $h(x)=e^{rx}$, alors *h* est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x)=re^{rx}$, $h''(x)=r^2e^{rx}$. *h* est solution de (E) si et ssi pour tout réel *x* $r^2e^{rx}-e^{rx}=0 \Leftrightarrow (r^2-1)e^{rx}=0 \Leftrightarrow r^2=1$. *r* est donc égal à 1 ou –1, et les fonctions recherchées sont donc $x\to e^x$ et $x\to e^{-x}$ **(0,5 point)**

2) $\varphi: x\to \alpha e^x+\beta e^{-x}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\varphi'(x)=\alpha e^x-\beta e^{-x}$, $\varphi''(x)=\alpha e^x+\beta e^{-x}$, donc pour tout réel *x* $\varphi''(x)-\varphi(x)=0$: φ est solution de (E) **(0,25 point)**

3) On cherche une fonction de la forme $\varphi: x\to \alpha e^x+\beta e^{-x}$, telle que $\varphi(\ln 2)=\frac{3}{4}$ et $\varphi'(\ln 2)=\frac{5}{4}$, ce qui donne le système : $\begin{cases} \alpha e^{\ln 2}+\beta e^{-\ln 2}=\frac{3}{4} \\ \alpha e^{\ln 2}-\beta e^{-\ln 2}=\frac{5}{4} \end{cases}$. Compte tenu de $e^{\ln 2}=2$ et $e^{-\ln 2}=\frac{1}{2}$, on obtient

   $$\begin{cases} 2\alpha+\frac{1}{2}\beta=\frac{3}{4} \\ 2\alpha-\frac{1}{2}\beta=\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha=2 \\ \beta=-\frac{1}{2} \end{cases}.$$

   La fonction recherchée est donc définie par $x\to \frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}$ **(0,75 point)**

Partie B (5 points)

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$.

1) Soit μ un réel. $f(x)=\mu \Leftrightarrow \frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\mu \Leftrightarrow e^x-e^{-x}=2\mu \Leftrightarrow e^{2x}-2\mu e^x-1=0$ **(0,25 point)**

Posons maintenant $X = e^x$. On obtient $X^2 - 2\mu X - 1 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 4\mu^2 + 4 = 4(\mu^2 + 1) > 0$ pour toute valeur de μ. Cette équation a donc deux solutions réelles $X_1 = \dfrac{2\mu + 2\sqrt{\mu^2+1}}{2} = \mu + \sqrt{\mu^2+1} > 0$, et $X_2 = \mu - \sqrt{\mu^2+1} < 0$ (il est clair que pour tout réel μ, $\sqrt{\mu^2+1} > \sqrt{\mu^2} = |\mu|$. $X = e^x$ étant strictement positif, on a $f(x) = \mu$ si et ssi $e^x = \mu + \sqrt{\mu^2+1} \Leftrightarrow x = \ln(\mu + \sqrt{\mu^2+1})$. L'équation $f(x) = \mu$ a donc bien une solution unique dans $\mathbb{R}$ **(0,75 point)**

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$, $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ par composition et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ **(0,25 point)**

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0^+$ par composition et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ **(0,25 point)**

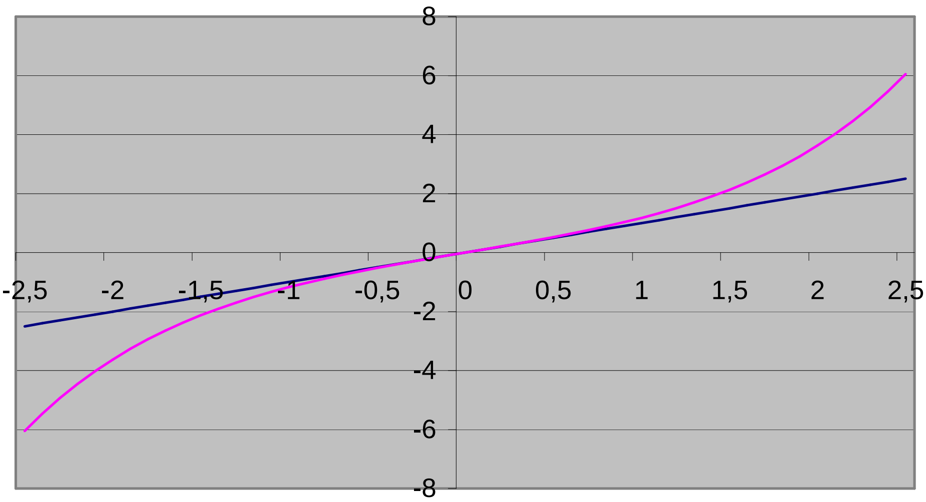
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x $f'(x) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0$ car une exponentielle est toujours positive. *f* est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. **(0,75 point)**

3) *f*(0) = 0 et *f*'(0) = 1 donc une équation de *T* est *y* = *x* **(0,25 point)**

d est définie par $d(x) = f(x) - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout *x* :

$d'(x) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - 1 = \dfrac{e^{2x} - 2e^x + 1}{2e^x} = \dfrac{(e^x - 1)^2}{2e^x}$ est toujours positif, nul si et ssi *x* = 0. La fonction *d* est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et *d*(0) = 0, donc *d* est négative sur]∞ ; 0[et positive sur]0 ; +∞[. Par suite $\mathscr{C}$ est en dessous de *T* sur]-∞ ; 0[et au dessus de *T* sur]0 ; +∞[**(0,75 point)**

Graphique : **(1 point)**



4) Les fonctions *f* et $x \to x$ étant continues (donc intégrables) sur [0 ; 1] et sur cet intervalle $f(x) \geq x$, l'aire du domaine *D* est donc égale, en unités d'aire, à :

$A = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) - x\right)dx = \left[\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{e + e^{-1} - 1}{2} - 1 = \frac{e + e^{-1} - 3}{2}$. L'unité de longueur est de 2cm, donc l'aire vaut $A = 2(e^1 + e^{-1} - 3)\text{cm}^2$ **(0,75 point)**

Partie C (3,5 points)

On s'intéresse maintenant aux fonctions Φ vérifiant $\Phi(x)-\int_0^x (x-t)\Phi(t)dt = x$ (H)

1) On suppose qu'une telle fonction existe. On a alors pour tout réel x :

$\Phi(x) = x+\int_0^x (x-t)\Phi(t)dt = x+\int_0^x x\Phi(t)dt-\int_0^x t\Phi(t)dt = x+x\int_0^x \Phi(t)dt-\int_0^x t\Phi(t)dt$ par linéarité de l'intégrale. **(0,25 point)** On déduit de l'expression précédente que $\Phi(0)=0+0\int_0^0 \Phi(t)dt-\int_0^0 t\Phi(t)dt=0$ **(0,25 point)**

La fonction $x \to \int_0^x \Phi(t)dt$ est une primitive de Φ, et la fonction $x \to \int_0^x t\Phi(t)dt$ est une primitive de la fonction $x \to x\Phi(x)$. Leurs dérivées respectives sont donc connues, et nous pouvons dériver la relation de la question précédente en utilisant les dérivées de sommes et produits : pour tout réel x, $\Phi'(x)=1+x\Phi(x)+\int_0^x \Phi(t)dt - x\Phi(x) = 1+\int_0^x \Phi(t)dt$. On en déduit que $\Phi'(0)=1$

(1,25 point)

On peut encore dériver la relation ci-dessus, car les fonctions $x \to 1$ et $x \to \int_0^x \Phi(t)dt$ sont dérivables de dérivées respectives 0 et Φ. On obtient que $\Phi''(x)=\Phi(x)$ et Φ est bien une solution de (E). **(0,25 point)** Pour trouver laquelle, nous savons que Φ est de la forme $\Phi(x)=\alpha e^x+\beta e^{-x}$ d'après le A 2), reste à déterminer α et β, ce que nous allons faire grâce à la connaissance de $\Phi(0)=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta=0$ et $\Phi'(0)=1 \Leftrightarrow \alpha-\beta=1$. Nous obtenons que α et β sont égaux à $\frac{1}{2}$ et $\Phi(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}) = f(x)$ **(0,5 point)**

2) Les fonctions $u: t \to t$ et $v': t \to e^t - e^{-t}$ sont dérivables sur ℝ, donc intégrables sur [0 ; x] et l'on a $u'(t)=1, v(t)=e^t+e^{-t}$. Par conséquent :

$$\int_0^x t(e^t-e^{-t})dt = \left[t(e^t+e^{-t})\right]_0^x - \int_0^x (e^t+e^{-t})dt = x(e^x+e^{-x}) - \left[e^t-e^{-t}\right]_0^x$$. **(0,75 point)**

$$= x(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})$$

Vérifions enfin que Φ vérifie la relation (H) :

$$\int_0^x (x-t)\Phi(t)dt = \int_0^x (x-t)\frac{e^t-e^{-t}}{2}dt = \frac{x}{2}\int_0^x (e^t-e^{-t})dt - \frac{1}{2}\int_0^x t(e^t-e^{-t})dt$$

$$= \frac{x}{2}\left[e^t+e^{-t}\right]_0^x - \frac{1}{2}\left[x(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})\right] = \frac{x}{2}(e^x+e^{-x}-2) - \frac{1}{2}\left[x(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})\right]$$

$$= -x+\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}) = -x+\Phi(x)$$

On a donc bien $\Phi(x)-\int_0^x (x-t)\Phi(t)dt = x$ et Φ vérifie la relation (H) **(0,5 point)**