Lycée Richelieu
Bac blanc
Epreuve de mathématiques Terminale S

Durée : 4 heures.
La calculatrice est autorisée.
Le sujet comporte 3 pages plus une figure à rendre avec la copie.
Un formulaire est joint au sujet

Exercice 1 (pour tous les candidats), 5 points

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, A, A', B, B' sont les points d'affixes respectives 1, –1, i, $-i$. A tout point M d'affixe z, distinct des points O, A, A', B, B' on associe les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 tels que les triangles BMM_1 et AMM_2 soient rectangles et isocèles avec :

$(\overrightarrow{M_1B}, \overrightarrow{M_1M}) = (\overrightarrow{M_2M}, \overrightarrow{M_2A}) = \frac{\pi}{2}$ (voir la figure ci-joint, à compléter et que l'on rendra avec sa copie)

1. a) Justifier les égalités $z - z_1 = i(i - z_1)$ et $1 - z_2 = i(z - z_2)$.

b) Vérifier que z_1 et z_2 peuvent s'écrire $z_1 = \frac{1+i}{2}(z+1)$ et $z_2 = \frac{1-i}{2}(z+i)$.

2. On se propose de déterminer les points M pour lesquels le triangle OM_1M_2 est équilatéral.

a) Montrer que $OM_1 = OM_2$ équivaut à $|z+1| = |z+i|$. En déduire l'ensemble Δ des points M du plan tels que $OM_1 = OM_2$, le représenter sur la figure.

b) Montrer que $OM_1 = M_1M_2$ équivaut à $|z+1|^2 = 2|z|^2$.

c) Montrer que $|z+1|^2 = 2|z|^2$ équivaut à $|z-1|^2 = 2$ (on pourra poser $z = x + iy$). En déduire l'ensemble Γ des points M du plan pour lesquels $OM_1 = M_1M_2$, le représenter sur la figure.

d) En déduire les deux points M pour lesquels OM_1M_2 est équilatéral et les placer sur la figure.

Exercice 2 (pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité), 4 points

On définit deux suites u et v par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n)$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + 4v_n)$$

1. On appelle w la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - u_n$.
a) Montrer que w est une suite géométrique à termes positifs dont on précisera la raison.
b) Déterminer la limite de la suite w.

2. a) Montrer que la suite u est croissante.
b) Montrer que la suite v est décroissante.
c) Démontrer que les suites u et v sont convergentes vers une limite qu'on appellera l.

3. On appelle t la suite définie pour tout entier naturel n par $t_n = 4u_n + 15v_n$.
a) Montrer que la suite t est une suite constante. Déterminer cette constante.
b) Déterminer alors la valeur de l.

Exercice 2 (pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité), 4 points

1. On considère l'équation (E) : $17x - 6y = 2$, où x et y sont des entiers.

a) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $17x = 6y$.

b) Montrer que le couple (–1 ; –3) est une solution particulière de l'équation $17x - 6y = 1$, en déduire une solution particulière de l'équation (E).

c) En déduire tous les couples de $\mathbb{Z}^2$ solution de (E).

d) Montrer que le pgcd des couples solution de (E) est 1 ou 2.

e) Déterminer les couples (x ; y) solution de (E) dont le pgcd est 2.

f) Déterminer le couple (x_0 ; y_0) solution de (E) tel que :

$$\text{pgcd}(x_0 ; y_0) = 2 \text{ et } 100 \leqslant y_0 \leqslant 150.$$

2. Une bande de 17 pirates s'est emparée d'un butin composé de pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager équitablement et de laisser le reste à leur cuisinier chinois, qui recevrait alors 3 pièces d'or. Mais leur bateau fit naufrage, et ne furent sauvés que 6 pirates, le cuisinier et le butin. Le partage laisserait alors 5 pièces au cuisinier.

a) On note N le nombre de pièces d'or du butin, x le nombre de pièces qu'aurait reçu chaque pirate avant le naufrage, y le nombre de pièces reçues par chaque pirate après le naufrage. Exprimer N en fonction de x, puis en fonction de y.

b) Ecrire alors la relation liant x et y.

c) En utilisant les résultats de la question **1**, déterminer la fortune minimale que pourra espérer le cuisinier quand il décidera d'empoisonner le reste des pirates avec du civet de rat frelaté.

Problème (11 points)

A. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln(1 + e^{-x}) .$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 4 cm)

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

4. Montrer C admet une asymptote D d'équation : $y = -x$.

Préciser la position de D par rapport à $\mathscr{C}$.

3. a) Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

b) Tracer D, T et $\mathscr{C}$.

4. Soit x_0 un nombre réel non nul. On note M et N les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives x_0 et $-x_0$.

a) Vérifier que :

$$f(x_0) - f(-x_0) = -x_0.$$

b) Calculer le coefficient directeur de la droite (MN).

Que peut-on en conclure ?

c) Montrer que :

$$f'(x_0) + f'(-x_0) = -1.$$

En déduire que les tangentes à $\mathscr{C}$ en M et N se coupent sur l'axe des ordonnées.

d) Illustrer sur la courbe $\mathscr{C}$ les résultats précédents en prenant $x_0 = 1$.

B. On se propose dans cette partie d'étudier la suite de nombres réels (u_n), définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 + \dfrac{1}{e} \\ u_{n+1} = u_n\left(1 + \dfrac{1}{e^{n+1}}\right) \text{ pour tout entier } n \text{ de } \mathbb{N}^* \end{cases}.$$

1. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$: $u_n > 0$.

b) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

c) Montrer par récurrence que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:

$$\ln u_n = f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n) . \qquad (1)$$

2. a) Etudier les variations des fonctions g et f définies sur $[0 ; +\infty[$ respectivement par :

$$g(t) = \ln(1 + t) - t \quad \text{et} \quad h(\mathrm{t}) = \ln(1 + t) - t + \frac{t^2}{2} .$$

b) En déduire que, pour tout réel t de $[0 ; +\infty[$:

$$\mathrm{t} - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1 + t) \leq t .$$

c) En déduire que pour tout réel x :

$$e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} \leq f(x) \leq e^{-x} \qquad (2)$$

3. a) Soit a est un réel strictement supérieur à 1. Calculer, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$,

$S_n = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a^3} + \ldots + \dfrac{1}{a^n}$ et montrer que la suite (S_n) admet une limite que l'on déterminera..

b) On pose, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$:

$$A_n = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \ldots + \frac{1}{e^n} \quad \text{et} \quad B_n = \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^4} + \frac{1}{e^6} + \ldots + \frac{1}{e^{2n}} .$$

A l'aide des relations (1) et (2), montrer que : $A_n - \dfrac{1}{2}B_n \leq \ln u_n \leq A_n$.

c) En déduire que la suite $(\ln u_n)$ est majorée .

4. a) Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note l sa limite.

b) On admet que si (a_n) et (b_n) convergent respectivement vers L et L' et si, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $a_n \leq b_n$ alors $L \leq L'$. Montrer que :

$$\frac{2e+1}{2(e^2-1)} \leq \ln l \leq \frac{1}{e-1} .$$

En déduire une valeur approchée de l à 0,1 prés .