Terminale S_5

Corrigé du bac blanc 2003

Exercice 1)

1) a) BMM_1 est rectangle isocèle en M_1 avec $\left(\overrightarrow{M_1B},\overrightarrow{M_1M}\right)=\frac{\pi}{2}$ donc M est l'image de B par la rotation de centre M_1 et d'angle $\frac{\pi}{2}$, ce qui s'écrit en complexes $z-z_1=e^{i\frac{\pi}{2}}(i-z_1)$ (l'affixe de M est z, celle de B est i, celle de M_1 est z_1), et compte tenu que $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$, on obtient $z-z_1=i(i-z_1)$. De même, A d'affixe 1 est l'image de M d'affixe z par la rotation de centre M_2 d'affixe z_2, d'angle $\frac{\pi}{2}$, soit $1-z_2=i(z-z_2)$. **(0,75 point)**

b) Déterminons z_1 et z_2 à l'aide des résultats précédents:

$z-z_1=i(i-z_1)\Leftrightarrow z-z_1=-1-iz_1\Leftrightarrow z+1=z_1(1-i)\Leftrightarrow z_1=\frac{z+1}{1-i}=\frac{1+i}{2}(z+1)$.

$1-z_2=i(z-z_2)\Leftrightarrow i(1-z_2)=-(z-z_2)\Leftrightarrow z_2(1+i)=z+i\Leftrightarrow z_2=\frac{z+i}{1+i}=\frac{1-i}{2}(z+i)$. **(1 point)**

2) On se propose de déterminer les points M pour lesquels OM_1M_2 est équilatéral.

a) Comme O est d'affixe 0, $OM_1=OM_2\Leftrightarrow |z_1|=|z_2|\Leftrightarrow \left|\frac{1+i}{2}(z+1)\right|=\left|\frac{1-i}{2}(z+i)\right|$. Comme le module d'un produit est égal au produit des modules, et que $\left|\frac{1+i}{2}\right|=\left|\frac{1-i}{2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$, on obtient que $OM_1=OM_2\Leftrightarrow |z+1|=|z+i|$. **(0,5 point)** Comme $|z+1|=|z-(-1)|$, c'est la distance $A'M$ (A' a pour affixe –1), et de même $|z+i|$ est la distance $B'M$. L'ensemble Δ est donc l'ensemble des points M du plan tels que $A'M = B'M$, c'est donc la médiatrice du segment [$A'B'$], privée du point O puisque par hypothèse M est distinct de O. **(0,25 point)**

b) $OM_1=M_1M_2\Leftrightarrow |z_1|=|z_2-z_1|\Leftrightarrow |z_1|^2=|z_2-z_1|^2$ car un module est toujours positif. Or $|z_1|^2=\left|\frac{1+i}{2}(z+1)\right|^2=\frac{1}{2}|z+1|^2$, et $|z_2-z_1|^2=\left|\frac{1-i}{2}(z+i)-\frac{1+i}{2}(z+1)\right|^2=|-iz|^2=|z|^2$, donc $OM_1=M_1M_2\Leftrightarrow\frac{1}{2}|z+1|^2=|z|^2\Leftrightarrow |z+1|^2=2|z|^2$. **(0,75 point)**

Posant $z = x + iy$, x et y réels, nous obtenons :

$|z+1|^2=2|z|^2\Leftrightarrow |x+iy+1|^2=2|x+iy|^2\Leftrightarrow (x+1)^2+y^2=2(x^2+y^2)$. Tous calculs faits, il vient $|z+1|^2=2|z|^2\Leftrightarrow x^2-2x+y^2=1\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=2\Leftrightarrow AM^2=2$. Γ est donc le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$, privé des points B et B'. **(0,75 point)**

c) Le triangle OM_1M_2 est équilatéral si et seulement si les deux conditions précédentes ont lieu en même temps. Les points M recherchés sont les intersections de Δ et Γ. **(0,5 point)**

Figure : 0,5 point

Exercice 2 (sans spécialité)

On considère les suites *u* et *v* définies par $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{4}(u_n + 3v_n) \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{5}(u_n + 4v_n) \end{cases}, u_0 = 1, v_0 = 2$.

1) On pose $w_n = v_n - u_n$. Alors pour tout entier *n*,

   $$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + 4v_n) - \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) = \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{4}\right)v_n + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right)u_n = \frac{1}{20}v_n - \frac{1}{20}u_n.$$

   On a donc pour tout *n* $w_{n+1} = \dfrac{1}{20}w_n$, donc la suite *w* est géométrique de raison $\dfrac{1}{20}$.

   Comme $w_0 = v_0 - u_0 = 1$, *w* a son premier terme positif, sa raison positive, donc tous ses termes sont positifs. **(1,25 point)**. Comme de plus la raison de *w* appartient à]0; 1[, la suite *w* a pour limite *0*. **(0,25 point)**

2) a) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{4}(u_n + 3v_n) - u_n = \dfrac{3}{4}(v_n - u_n) = \dfrac{3}{4}w_n$. Comme on a vu précédemment que *w* a tous ses termes positifs, on a pour tout *n* $u_{n+1} - u_n \geq 0$, donc *u* est croissante. **(0,5 point)**

   b) $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{5}(u_n + 4v_n) - v_n = \dfrac{4}{5}(u_n - v_n) = -\dfrac{4}{5}w_n$. De même, pour tout *n* $v_{n+1} - v_n \leq 0$ et *v* est décroissante. **(0,5 point)**

   c) On a donc *u* croissante, *v* décroissante et *v* – *u* tend vers 0 (car *v* – *u* = *w*). Les suites *u* et *v* sont adjacentes, elles ont donc une même limite *l*. **(0,5 point)**

3) a) On appelle *t* la suite définie par $t_n = 4u_n + 15v_n$. Ainsi pour tout entier *n* :

   $t_{n+1} = 4u_{n+1} + 15v_{n+1} = 4 \times \dfrac{1}{4}(u_n + 3v_n) + 15 \times \dfrac{1}{5}(u_n + 4v_n) = 4u_n + 15v_n = t_n$. La suite *t* est donc constante, égale à t_0 qui vaut $4u_0 + 15v_0 = 34$. On a donc pour tout *n* $t_n = 34$. **(0,5 point)**

   b) Si l'on fait tendre *n* vers $+\infty$ dans l'égalité $4u_n + 15v_n = t_n = 34$, comme *u* et *v* ont la même limite *l*, on obtient $4l + 15l = 34$ soit $l = \dfrac{34}{19}$. **(0,5 point)**

Exercice 2 (spécialité)

1) a) On considère l'équation : $17x = 6y$. 6 et 17 étant premiers entre eux (car 17 est premier et ne divise pas 6), 6 divise $17x$ donc d'après le théorème de Gauss 6 divise x. Il existe donc un entier k tel que $x = 6k$, et donc $6y = 17\times6k$ et $y = 17k$. réciproquement, il est facile de voir que tous les couples $(6k\,;\,17k)$ sont solution. Les solutions entières de cette équation sont donc $S_1 = \{(6k\,;\,17k),\ k \in \mathbb{Z}\}$. **(0,5 point)**

b) $17\times(-1) - 6\times(-3) = -17 + 18 = 1$, donc $(-1\,;\,-3)$ est solution de l'équation $17x - 6y = 1$. On obtient facilement que $(-2\,;\,-6)$ est une solution de (E). **(0,25 point)**

c) (E) est donc équivalente à $17x - 6y = 17\times(-2) - 6\times(-6)$, donc aussi à $17(x + 2) = 6(y + 6)$ et nous connaissons d'après le a) les solutions de cette dernière : $x + 2 = 6k$ et $y + 6 = 17k$, où k est un entier quelconque.

Les solutions de (E) sont donc $S_2 = \{(6k - 2\,;\,17k - 6),\ k \in \mathbb{Z}\}$. **(0,75 point)**

d) Tout diviseur commun à x et y solution de (E) divise aussi $17x - 6y$, c'est à dire 2. Le pgcd de x et y est donc un diviseur positif de 2, ce ne peut être que 1 ou 2. **(0,25 point)**

e) Il résulte du d) que le pgcd d'un couple $(x\,;\,y)$ solution de (E) est égal à 2 si et seulemnt si 2 divise x et y. 2 divise $6k$ et 2, donc $6k - 2$, donc 2 divise toujours x. En revanche, 2 divise 6, donc 2 divise $y = 17k - 6$ si et seulement si 2 divise $17k$. Comme 2 est premier avec 17, 2 divise $17k$ si et seulement si 2 divise k d'après le théorème de Gauss, c'est à dire $k = 2p$, $p\in\mathbb{Z}$. Les solution de (E) de pgcd 2 sont donc $(12p - 2\,;\,34p - 6)$. **(0,75 point)**

e) On veut donc avoir $y = 34p - 6$ et $100 \leqslant y \leqslant 150$, soit $106 \le 34p \le 156 \Leftrightarrow \frac{53}{17} \le p \le \frac{78}{17}$.

Les parties entières respectives de $\frac{53}{17}$ et $\frac{78}{17}$ état 3 et 4, la seule valeur entière possible de p est 4. La solution recherchée est donc $(46\,;\,130)$. **(0,5 point)**

2) a) D'après l'énoncé, $N = 17x + 3$ (x pièces pour chacun des 17 pirates et 3 pour le cuisinier), et $N = 6y + 5$. **(025 point)**

b) On a donc $17x + 3 = 6y + 5$ soit $17x - 6y = 2$ (quelle surprise !) **(0,25 point)**

c) Nous avons donc $x = 6k - 2$ et $y = 17k - 6$, avec x et y positifs (ce sont des nombres de pirates), donc $k \geqslant 1$. Comme N est un fonction croissante de x, la somme minimale s'obtient pour $k = 1$, $x = 4$ et $N = 71$. Le cuisinier peut espérer au minimum \$71. **(0,5 point)**

Problème

Partie A

f est définie sur ℝ par $f(x)=\ln(1+e^{-x})$, $\mathscr{C}$ est sa courbe.

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+e^{-x}=+\infty$, $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln X=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ par composition.

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+e^{-x}=1$, $\lim\limits_{X\to1} \ln X=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ par composition.

Etude de variations : *f* est dérivable sur ℝ par composition, et pour tout x $f'(x)=\dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

Comme une exponentielle est toujours positive, $1+e^{-x}$ est positif, $-e^{-x}$ est toujours négatif et *f'* est toujours négatif. *f* est donc strictement décroissante sur ℝ. On a donc le tableau :

x	0		$+\infty$
f'		$-$	
f	$+\infty$	↘	0

(1,25 point : 0,25 par limite, 0,25 pour la dérivée 0,25 pour son signe et 0,25 pour les variations)

2) Pour tout réel x, $f(x)+x=\ln(1+e^{-x})+x=\ln(1+e^{-x})+\ln(e^{x})=\ln(e^{x}(1+e^{-x}))=\ln(1+e^{x})$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+e^{x}=1$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x=0$ par composition. La droite *D* d'équation $y=x$ est asymptote à $\mathscr{C}$. Comme de plus e^{x} est toujours positif, $1+e^{x}$ est toujours supérieur à 1, donc $\ln(1+e^{x})$ est toujours positif et $\mathscr{C}$ est au dessus de *D*. **(1 point)**

3) $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$, $f(0)=\ln 2$ donc T a pour équation: $y=-\dfrac{1}{2}x+\ln 2$. **(0,25 point)**

Courbe : 1 point, +0,25 pour les tangentes du 4

4) a) x_0 est un réel non nul. Calculons

$$f(x_0)-f(-x_0)=\ln(1+e^{-x_0})-\ln(1+e^{x_0})=\ln\frac{1+e^{-x_0}}{1+e^{x_0}}=\ln\frac{e^{-x_0}(e^{x_0}+1)}{1+e^{x_0}}=\ln e^{-x_0}=-x_0$$ **.0,5 point**

b) Le coefficient directeur de (*MN*) vaut $\dfrac{f(x_0)-f(-x_0)}{x_0-(-x_0)}$, et d'après ce qui précède, il est égal à $\dfrac{-x_0}{2x_0}$, c'est à dire à $-\dfrac{1}{2}$. On peut en conclure que toutes les droites (*MN*) sont parallèles entre elles et à la tangente *T*. **(0,5 point)**

c) Calculons

$$f'(x_0)+f'(-x_0)=-\frac{e^{-x_0}}{1+e^{-x_0}}-\frac{e^{x_0}}{1+e^{x_0}}=-\frac{e^{-x_0}}{e^{-x_0}(e^{x_0}+1)}-\frac{e^{x_0}}{1+e^{x_0}}$$ **(0,25 point)**

$$=-\frac{1}{1+e^{x_0}}-\frac{e^{x_0}}{1+e^{x_0}}=-\frac{1+e^{x_0}}{1+e^{x_0}}=-1$$

Les tangentes à $\mathscr{C}$ en *M* et *N* ont pour équations respectives

$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\Leftrightarrow y=xf'(x_0)x+f(x_0)-x_0f'(x_0)$

et $y=f'(-x_0)(x+x_0)+f(-x_0)\Leftrightarrow y=xf'(-x_0)x+f(-x_0)+x_0f'(-x_0)$.

Leurs ordonnées à l'origine sont respectivement $f(x_0)-x_0f'(x_0)$ et $f(-x_0)+x_0f'(-x_0)$.

Compte tenu des égalités $f(-x_0)=f(x_0)+x_0$ et $f'(-x_0)=1-f'(x_0)$, on trouve qu'elles sont égales, autrement dit que ces tangentes se coupent sur l'axe des ordonnées. **(0,5 point)**

Partie B

On étudie la suite (u_n) définie par $u_1 = 1+\frac{1}{e}, u_{n+1} = u_n(1+\frac{1}{e^{n+1}})$.

1) a) Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n > 0$.

Initialisation : $e > 0$ donc $1+\frac{1}{e} > 0$ et la propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : supposons que pour un certain n, $u_n > 0$. Comme $1+\frac{1}{e^{n+1}} > 0$, $u_n(1+\frac{1}{e^{n+1}}) > 0$ et $u_{n+1} > 0$. La propriété $u_n > 0$, vraie pour $n = 1$ et héréditaire, est vraie $\forall$ $n \geqslant 1$. (**0,5 point)**

b) Pour $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n = u_n(1+\frac{1}{e^{n+1}}) - u_n = \frac{u_n}{e^{n+1}}$. D'après la question précédente, $u_n > 0$, une exponentielle est positive donc pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est strictement croissante. **(0,5 point)**

c) Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $\ln u_n = f(1) + f(2) + ... + f(n)$.

Initialisation : $\ln u_1 = \ln(1+\frac{1}{e}) = \ln(1+e^{-1}) = f(1)$, la propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : Supposons que pour un certain n, $\ln u_n = f(1) + f(2) + ... + f(n)$. On a alors $\ln u_{n+1} = \ln(u_n(1+\frac{1}{e^{n+1}})) = \ln u_n + \ln(1+\frac{1}{e^{n+1}}) = \ln u_n + \ln(1+e^{-(n+1)}) = \ln u_n + f(n+1)$.

Comme par hypothèse de récurrence $\ln u_n = f(1) + f(2) + ... + f(n)$, on obtient bien $\ln u_{n+1} = f(1) + f(2) + ... + f(n) + f(n+1)$. La propriété $\ln u_n = f(1) + f(2) + ... + f(n)$, vraie pour $n = 1$ et héréditaire, est vraie pour tout $n \geqslant 1$. **(0,5 point)**

2) a) g est définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(t) = \ln(1+t) - t$. Elle est dérivable par somme et composée, et pour tout $t \geqslant 0$, $g'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 = \frac{-t}{1+t}$. Comme $t \geqslant 0$, $1 + t \geqslant 0$ et g' est toujours négatif, donc g est strictement décroissante sur $[0 ; \infty[$. **(0,5 point)**

h est définie sur $[0 ; +\infty[$ par $h(t) = \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{2}$. Elle est dérivable par somme et composée, et pour tout $t \geqslant 0$, $h'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 + t = \frac{t^2}{1+t}$. Comme ci-dessus, h' est touojurs positif, et h est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$. **(0,5 point)**

b) Comme $g(0) = 0$ et que g est décroissante, pour tout t de $[0 ; +\infty[$ $g(t) \leqslant 0$. De même, $h(0) = 0$ et h est croissante, donc pour tout t de $[0 ; +\infty[$ $h(t) \geqslant 0$. On a donc sur $[0 ; +\infty[$ $\ln(1+t) - t \leq 0 \Leftrightarrow \ln(1+t) \leq t$ et $\ln(1+t) - t + \frac{t^2}{2} \geq 0 \Leftrightarrow t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t)$. On a bien prouvé que pour tout t de $[0 ; +\infty[$ $t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$. **(0,25 point)**

c) Posons dans l'inégalité précédente $t = e^{-x}$ (c'est possible car pour tout réel x, $e^{-x} > 0$).
On obtient pour tout réel x $e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} \leq \ln(1+e^{-x}) \leq e^{-x} \Leftrightarrow \frac{1}{e^x} - \frac{1}{2e^{2x}} \leq f(x) \leq \frac{1}{e^x}$. **(0,25 point)**

3) a) a est un réel strictement supérieur à 1. On pose $S_n = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + ... + \frac{1}{a^n}$. S_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique, donc $S_n = \frac{1}{a}\frac{1-\frac{1}{a^n}}{1-\frac{1}{a}} = \frac{1-\frac{1}{a^n}}{a-1}$. Comme $a > 1$ la limite de $\frac{1}{a^n}$ est 0 et S_n tend vers $\frac{1}{a-1}$. **(0,5point)**

b) Ecrivons la relation (2) pour x prenant les valeurs 1 à n :

$\frac{1}{e} - \frac{1}{2e^2} \leq f(1) \leq \frac{1}{e}$, $\frac{1}{e^2} - \frac{1}{2e^4} \leq f(2) \leq \frac{1}{e^2}$, $\frac{1}{e^3} - \frac{1}{2e^6} \leq f(3) \leq \frac{1}{e^3}$, … $\frac{1}{e^n} - \frac{1}{2e^{2n}} \leq f(n) \leq \frac{1}{e^n}$

Par addition de ces inégalités, nous obtenons :

$\frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + ... + \frac{1}{e^n} - (\frac{1}{2e^2} + \frac{1}{2e^4} + ... + \frac{1}{2e^{2n}}) \leq f(1) + f(2) + ... + f(n) \leq \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + ... + \frac{1}{e^n}$, soit, en utilisant la relation (1), $A_n - \frac{1}{2}B_n \leq \ln u_n \leq A_n$. **(0,5 point)**

c) On a donc pour tout n $\ln u_n \leq A_n$. D'autre part, d'après le a), $A_n = \frac{1-\frac{1}{e^n}}{e-1}$ donc pour tout n $A_n \leq \frac{1}{e-1}$, et la suite $(\ln u_n)$ est majorée par $\frac{1}{e-1}$. **(0,5 point)**

4) a) Comme l'exponentielle est croissante, on a pour tout n $u_n \leq e^{\frac{1}{e-1}}$. La suite (u_n), croissante d'après le 1) b, et majorée est convergente vers une limite l. **(0,25 point)**

b) Comme la fonction logarithme est continue, la suite $(\ln u_n)$ converge vers ln l. d'autre part, d'après le 3) a), la suite A_n converge vers $\frac{1}{e-1}$, B_n vers $\frac{1}{e^2-1}$, donc $A_n - \frac{1}{2}B_n$ a pour limite $\frac{1}{e-1} - \frac{1}{2(e^2-1)} = \frac{2(e+1)}{2(e^2-1)} - \frac{1}{2(e^2-1)} = \frac{2e+1}{2(e^2-1)}$. De l'inégalité pour tout n $A_n - \frac{1}{2}B_n \leq \ln u_n \leq A_n$, on obtient par passage à la limite $\frac{2e+1}{e^2-1} \leq \ln l \leq \frac{1}{e-1}$. **(0,5 point)**

On a donc, l'exponentielle étant croissante, $e^{\frac{2e+1}{e^2-1}} \leq l \leq e^{\frac{1}{e-1}}$. 0,7 est une valeur approchée de l à 10^{-1} près. **(0,25 point)**