Classe de terminale S_6 ***Mercredi 31 Janvier 2001***

Devoir de mathématiques

N°11

Exercice 1) (bac S, Japon 1997 : 5 points)

On considère le plan complexe $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

1) Soit le polynôme *P* tel que pour tout *z* de $\mathbb{C}$ $P(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$. Déterminer les réels *u* et *v* tels que $P(z) = (z-2)(z^2 + uz + v)$ et résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
2) On note α la solution de l'équation ci-dessus dont la partie imaginaire est strictement positive et β le conjugué de α. Soient *A*, *B* et *C* les points d'affixes respectives α, β et 2, *I* le milieu de [*AB*] et *r* la rotation de centre *O* et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Déterminer l'affixe du point *r*(*B*) et en déduire la nature du quadrilatère *OABC*.
3) Soit *f* l'application de $\mathscr{P}$ privé du point *C* dans $\mathscr{P}$ qui au point *M* d'affixe *z* ($z \neq 2$) associe le point *M*' d'affixe *z*' définie par $z' = \dfrac{z-(1+i)}{z-2}$.

a) Déterminer *f* (*A*) et *f* (*b*). Déterminer le point *E* tel que *f* (*E*) = *C*.

b) Quelles distances représentent les réels $|z-(1+i)|$ et $|z-2|$? En déduire que si *M* appartient à la médiatrice de [*AC*], *M*' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 2) Bac S, sujet national, septembre 1995 : 6 points)

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$.
2) Soit *K*, *L*, *M* les points d'affixes respectives $z_K = 1+i$; $z_L = 1-i$; $z_M = -i\sqrt{3}$. Placer ces points dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ d'unité 4 cm. On complétera la figure au cours des questions suivantes.
3) a) On appelle *N* le symétrique de *M* par rapport au point *L*. Vérifier que l'affixe z_N du point *N* est $z_N = 2 + i(\sqrt{3} - 2)$.

   b) La rotation de centre *O* et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme le point *M* en *A* et le point *N* en *C*. Déterminer les affixes respectives z_A et z_C des points *A* et *C*.

   c) La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe 2*i* transforme le point *M* en *D* et le point *N* en *B*. Déterminer les affixes respectives z_B et z_D des points *B* et *D* .
4) a) Montrer que le point *K* est le milieu des segments [*DB*] et [*AC*]

   b) Montrer que $\dfrac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = i$

   c) En déduire la nature du quadrilatère *ABCD*.

Exercice 3) (d'après problème, bac S, la Réunion 1996 : 9 points)

On considère la fonction f définie sur]0 ; +∞[par $f(x) = e^x - \ln x$ et $\mathscr{C}$ sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm.

Partie A : Etude des variations de *f*.

1) a) Etudier les variations de la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = xe^x - 1$.
   b) En déduire qu'il existe un réel unique α appartenant à [0 ; 1] tel que $\alpha e^{\alpha} = 1$; donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.
   c) Préciser le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.
2) a) Déterminer les limites de f aux bornes de]0 ; +∞[.
   b) Calculer la dérivée f' de f et étudier son signe en utilisant la question A 1).
   c) Montrer que f admet un minimum m égal à $\alpha + \alpha^{-1}$. Justifier que $2{,}32 \leq m \leq 2{,}33$.

Partie B : Construction de la courbe $\mathscr{C}$ et calcul d'aire.

1) Donner une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1. Déterminer le point d'intersection de T et de l'axe des ordonnées.
2) Tracer T et $\mathscr{C}$.
3) Soit λ un réel appartenant à]0 ; 1[.
   a) Calculer $\int_{\lambda}^{1} \ln x\,dx$ en utilisant une intégration par parties.
   b) Exprimer en cm² en fonction de λ l'aire $A(\lambda)$ du domaine plan constitué par les points $M(x\,;\,y)$ tels que $\lambda \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq f(x)$.
   c) Déterminer la limite de $A(\lambda)$ quand λ tend vers 0.