Classe de terminale S_4 ***Jeudi 22 janvier 2004***

Devoir de mathématiques

N°10

Exercice 1) (d'après Bac S, Inde, Avril 1999, 7 points)

1) Démonstration de cours : Etudier la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $az^2+bz+c=0$, *a*, *b*, *c* étant trois réels avec *a* non nul.
   Résoudre l'équation $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$. On appellera z_1 et z_2 les solutions, z_1 ayant sa partie réelle positive. Donner la forme exponentielle de z_1 et z_2 puis celle de $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$.
2) Dans le plan complexe muni d'un repère othonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité 1 cm, on considère les points M_1 d'affixe $\sqrt{2}(1+i)$, M_2 d'affixe $\sqrt{2}(1-i)$ et *A* d'affixe $z_A=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   a) Déterminer l'affixe z_3 du point M_3 image de M_2 par l'homothétie *h* de centre *A* et de rapport –3.
   b) Déterminer l'affixe z_4 du point M_4 image de M_2 par la rotation *r* de centre *O* et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
   c) Représenter les points *O*, *A*, M_1, M_2, M_3, M_4
   d) Calculer $\frac{z_3-z_1}{z_4-z_1}$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 2) (D'après des sujets de concours GEIPEI, 6 points)

Dans chaque question sont proposées plusieurs réponses, chacune de ces réponses pouvant être vraie ou fausse. Il n'y a pas forcément une seule bonne réponse pour chaque question. Donner pour chaque question les réponses vraies et les réponses fausses. Chaque résultat exact rapportera des points, chaque résultat inexact entraînera une pénalité. Une absence de réponse ne sera pas considérée comme un résultat inexact. Si le total des points, pour une question est négatif, ce total sera ramené à 0.

1) Pour tous nombres complexes *z* et *z'* non nuls, on a :
   a) $|1+z|\geq 1$
   b) Si $|z|=|z-1|$ alors $\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}$
   c) Si $|z|=|z'|$ alors *z* = *z'* ou *z* = –*z'*
   d) $|z+z'|=|z|+|z'|$
2) On considère les complexes $a=1-i$ et $b=1+i\sqrt{3}$
   a) $ab=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$.
   b) Il existe un entier *n* non nul tel que a^n est un réel.
   c) Il existe un entier *n* non nul tel que a^n et b^n sont tous deux des entiers.
   d) Le point *A* d'affixe *a* est l'image du point *B* d'affixe *b* par une rotation de centre *O*.

3) Pour tout réel θ de [0 ; 2π[on pose $Z(\theta) = 1 + e^{i\theta}$. Alors :

   a) $Z(\frac{2\pi}{3}) = e^{i\frac{\pi}{3}}$

   b) Pour tout θ de [0 ; 2π[, $\overline{Z(\theta)} = Z(-\theta)$

   c) Pour tout θ de [0 ; 2π[, $Z(\theta)e^{i\frac{\theta}{2}}$ est réel

   d) L'ensemble des points $M(\theta)$ d'affixe $Z(\theta)$ est un cercle de rayon 1.

4) Soit a un réel de $]\frac{1}{e}\,;e[$ et (E) l'équation d'inconnue z : $z^2 - 2z\ln a + 1 = 0$. On appelle M et N les points dont les affixes sont les solutoins de (E). Alors :

   a) Les points M et N sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

   b) Les points M et N sont situés sur le cercle de centre O et de rayon 1.

   c) Il n'existe aucune valeur de a telle que M et N sont symétriques par rapport à O.

   d) Si A est le point d'affixe –1, on a AM < 2

Exercice 3) (D'après Bac S, Antilles-Guyanne, 2003, 7 points)

Dans le plan complexe, on considère les points A et B d'affixes respectives a et b. On construit à l'extérieur du triangle OAB supposé direct les carrés OAA_1A_2 et OBB_1B_2. Ainsi OAA_1A_2 est indirect et OBB_1B_2 est direct. On appelle a_1, a_2, b_1, b_2 les affixes des points A_1, A_2, B_1, B_2.

1) En considérant des rotations de centre O, calculer a_2 et b_2.
2) En déduire que $a_1 = a - ai$ et $b_1 = b + bi$
3) On appelle I le milieu de [OA_1], J celui de [OB_1], K celui de [AB]. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{JK}$. Que peut-on en déduire ?