Classe de TS$_4$

Correction du DS 10 (complexes)

Exercice 1

1) $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 8 - 16 = -8$. Elle a deux solutions complexes conjuguées, $z_1 = \dfrac{2\sqrt{2} + i\sqrt{-\Delta}}{2} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

En outre, on peut écrire $z_1 = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

On en déduit que $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2 = \left(\dfrac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)^2 = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2 = e^{i\pi} = -1$.

2) M_3 est l'image de M_2 par l'homothétie de centre A et de rapport –3 donc :

$z_3 - z_A = -3(z_2 - z_A)$ soit $z_3 = 4z_A - 3z_2 = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2}(1-i) = -\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}$

M_4 est l'image de M_2 par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ donc :

$z_4 = e^{-i\frac{\pi}{2}} z_2 = -i\sqrt{2}(1-i) = -\sqrt{2}(1+i)$

$\dfrac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} = \dfrac{\sqrt{2}(-1+3i) - \sqrt{2}(1+i)}{-\sqrt{2}(1+i) - \sqrt{2}(1+i)} = \dfrac{-2+2i}{-2-2i} = \dfrac{(-2+2i)(-2+2i)}{4+4} = \dfrac{4-8i-4}{8} = -i$.

On a donc $z_3 - z_1 = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_4 - z_1)$: M_3 est l'image de M_4 par la rotation de centre M_1 et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, le triangle $M_1M_3M_4$ est rectangle isocèle de sommet principal M_1.

Exercice 2)

Question 1 sur les modules : il est important de penser que le module est une distance.

$|1+z| \geq 1$ est faux : par exemple si z = –1. L'ensemble des points d'affixe z tels que $|1+z| \geq 1$ est l'extérieur du cercle de centre le point d'affixe –1, de rayon 1.

Si $|z| = |z-1|$ alors $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{1}{2}$ est vrai : on exprime que le point d'affixe z est à égale distance des points d'affixes 0 et 1, il est donc sur leur médiatrice, la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$.

Si $|z| = |z'|$ alors $z = z'$ ou $z = -z'$ est faux : ce sont les affixes de deux points à même distance de O, donc sur un même cercle de centre O.

$|z+z'| = |z| + |z'|$ est faux : $|z+z'|$ est la diagonale du parallélogramme dont $|z|$ et $|z'|$ sont les côtés. Cett condition est vraie quand les points d'affixes z et z' sont sur une même demi-droite d'origine 0.

Question 2 : il fallait mettre a et b en forme exponentielle, on avait :

$a = 1 - i = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $b = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

$ab = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$ est faux : la vraie réponse est $ab = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

Il existe un entier n non nul tel que a^n est un réel est vrai : par exemple on peut prendre n = 4, et $a^4 = \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = \sqrt{2}^4 e^{-i\pi} = -4$.

Il existe un entier n non nul tel que a^n et b^n sont tous deux des entiers est vrai, par exemple $n = 12$.
Le point A d'affixe a est l'image du point B d'affixe b par une rotation de centre O est faux, ces deux complexs n'ont pas le même module.
Question 3 sur les cercles et la notation exponentielle. On pose $Z(\theta)=1+e^{i\theta}$

$Z(\frac{2\pi}{3})=e^{i\frac{\pi}{3}}$ est vrai : $1+e^{2i\frac{\pi}{3}}=1+-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Pour tout θ de $[0 ; 2\pi[$, $\overline{Z(\theta)}=Z(-\theta)$ est vrai car $\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$

Pour tout θ de $[0 ; 2\pi[$, $Z(\theta)e^{i\frac{\theta}{2}}$ est réel est faux, ce serait vrai pour $Z(\theta)e^{-i\frac{\theta}{2}}$.
L'ensemble des points $M(\theta)$ d'affixe $Z(\theta)$ est un cercle de rayon 1 est vrai, c'est la représentation du cercle de centre le point d'affixe 1, de rayon 1.
Question 4 sur l'équation du second degré $z^2-2z\ln a+1=0$: il fallait la résoudre. Son discriminant est $\Delta=4\ln^2 a-4=4\left(\ln^2 a-1\right)$. Comme a appartient à $]\frac{1}{e};e[$, son logarithme est compris entre –1 et 1 et le discriminant est négatif. Il y a donc deux solutions complexes conjuguées, $\ln a+i\sqrt{1-\ln^2 a}$ et $\ln a-i\sqrt{1-\ln^2 a}$ après simplification par 2.
Les points M et N sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses est vrai car les solutions sont conjuguées.
Les points M et N sont situés sur le cercle de centre O et de rayon 1 est rai car les deux complexes ont pour module 1 (les ln a s'éliminent)
Il n'existe aucune valeur de a telle que M et N sont symétriques par rapport à O est faux : si a est égal à 1, on trouve i et $-i$.
Si A est le point d'affixe –1, on a AM < 2 est vrai : comme M est sur le cercle, la distance est inférieure ou égale à 2. On a l'inégalité stricte car le discriminant est strictement négatif.

Exercice 3)

Dans le plan complexe, on considère les points A et B d'affixes respectives a et b. On construit à l'extérieur du triangle OAB supposé direct les carrés OAA_1A_2 et OBB_1B_2. Ainsi OAA_1A_2 est indirect et OBB_1B_2 est direct. On appelle a_1, a_2, b_1, b_2 les affixes des points A_1, A_2, B_1, B_2.
Le triangle OAA_2 est rectangle isocèle de sommet principal O, et, compte tenu des données, A_2 est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, donc $a_2=e^{-i\frac{\pi}{2}}a=-ia$. De même, B_2 est l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, donc $b_2=e^{i\frac{\pi}{2}}b=ib$.

Comme OAA_1A_2 est un carré, c'est aussi un parallélogramme, et $\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA_2}$, et donc $a_1=a+a_2=a-ai$. Il en est de même pour $\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB_2}$, et $b_1=b+b_2=b+bi$.
Le milieu d'un segment a pour affixe la demi somme de celles des extrêmités de ce segment. Ainsi I, milieu de $[OA_1]$ a pour affixe $z_I=\frac{a_1}{2}=\frac{a-ai}{2}$. J est milieu de $[OB_1]$ donc son affixe est $z_J=\frac{b_1}{2}=\frac{b+bi}{2}$, et K est milieu de $[AB]$ donc $z_K=\frac{a+b}{2}$.

L'affixe de $\overrightarrow{IK}$ est $z_K-z_I=\frac{a+b}{2}-\frac{a-ai}{2}=\frac{b+ai}{2}$. Celle de $\overrightarrow{JK}$ est $z_K-z_J=\frac{a+b}{2}-\frac{b+bi}{2}=\frac{a-bi}{2}$.

On remarque que $i\frac{a-bi}{2}=\frac{b+ai}{2}$ donc $z_K-z_I=i(z_K-z_I)$ ou encore $z_I-z_K=i(z_J-z_K)$. Ainsi I est l'image de J par la rotation de centre K et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Le triangle IJK est recangle isocèle de sommet principal K.