Classe de Terminale S_4 **Lundi 11 Octobre 1999**

Devoir de mathématiques

N°4

Exercice 1) (Bac S, Polynésie 1995) (5,5 points)

Partie A

Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^2 + 2z\sqrt{3} + 4$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

2) Ecrire les solutions sous forme trigonométrique.

Partie B

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 4 cm.

On appelle *A*, *B*, *C* les points d'affixes respectives $a = 2i$, $b = -\sqrt{3} + i$, $c = -\sqrt{3} - i$.

1) Placer les points *A*, *B*, *C* sur une figure.

2) Soit $Z = \dfrac{a-b}{c-b}$: a) Interpréter géométriquement le module et un argument de *Z*.

b) Ecrire *Z* sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

c) En déduire la nature du triangle *ABC* ainsi qu'une mesure de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

3) Calculer l'aire du triangle *ABC* en cm^2.

Exercice 2) (Bac C, Lyon, 1987,extrait) (9 points)

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{3}(x^2 + x + \dfrac{1}{x})$ et la fonction *g* définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$.

1) Montrer que pour tout *x* de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ les fonctions *f* 'et *g* ont le même signe.

2) Etudier les variations de la fonction *g* sur $\mathbb{R}$. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α, avec $0 < \alpha < 1$. Donner à la calculatrice une valeur approchée de α à 10^{-2} près. Etudier le signe de $g(x)$.

3) Dresser le tableau de variations de la fonction *f*. On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 3 cm, par I le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse -1 et par J le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1. (Il n'est pas demandé dans cette question de tracer $\mathscr{C}$).

4) a) Vérifier que la droite (IJ) est tangente en J à $\mathscr{C}$.

b) Déterminer une équation de la tangente T en I à $\mathscr{C}$.

5) Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T

6) Construire $\mathscr{C}$.

Exercice 3) (Bac C, Aix-Marseille, 1988, extrait) (5,5 points)

On considère la fonction *f* définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{3}}{2x}$, et on appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (on ne construira pas $\mathscr{C}$).

1) a) Etudier les variations de *f* sur $]0, +\infty[$

b) Montrer que $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes dont une est la droite d'équation $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

2) a) Soit *m* un nombre réel. Discuter le nombre de solutions à l'équation $f(x) = m$.

b) Pour tout $m > \sqrt{2}$ on appelle A et B les points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de la droite d'équation $y = m$. I est le milieu du segment [AB]. Montrer que quand *m* décrit l'intervalle $]\sqrt{2}, +\infty[$, I décrit une partie, que l'on précisera, de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}y$.