Classe de Terminale S_6 ***mardi 15 mai 2001***

Bac blanc de mathématiques

Exercice 1)(d'après Bac S, Asie 1998, 5 points)

Cet exercice n'est plus au programme

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1 cm.

1) On considère la courbe $\mathscr{C}$ représentée paramétriquement par $\begin{cases} x = f(t) = \dfrac{1}{2}\left(t^2+2\right) \\ y = g(t) = \dfrac{1}{2}\left(t^3+2t\right) \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.
   a) Montrer que $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.
   b) Etudier conjointement les variations des fonctions f et g.
   c) Préciser la tangente à $\mathscr{C}$ au point de paramètre 0.
   d) Tracer $\mathscr{C}$.
2) On appelle $\mathscr{P}$ la courbe dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = 2t \end{cases}$, t $\in \mathbb{R}$.
   a) Etudier les variations des fonctions x et y, représenter $\mathscr{P}$.
   b) Soit $\mathscr{D}_t$ la tangente à $\mathscr{P}$ au point M_t de coordonnées $(x(t)\,;y(t))$ et Δ_t la perpendiculaire à $\mathscr{D}_t$ en M_t. Montrer qu'une équation cartésienne de Δ_t est $Y = -tX + t^3 + 2t$.
3) Pour $t \in \mathbb{R}$-{0}, on appelle A_t et B_t les points d'intersection respectifs de Δ_t avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées du repère. On appelle I_t le milieu de $[A_tB_t]$.
   Exprimer en fonction de t les coordonnées de I_t.
   Quel est l'ensemble des points I_t lorsque t décrit $\mathbb{R}$-{0} ?

Exercice 2)(Bac S, Pondichéry 1998, 4 points)

1) On dispose d'une urne U_1 contenant trois boules rouges et sept boules noires. On extrait simultanément deux boules de cette urne, on admet que tous les tirages sont équiprobables.
   a) Quelle est la probabilité p_1 que les deux boules tirées soient rouges ?
   b) Quelle est la probabilité p_2 que les deux boules tirées soient noires ?
   c) Quelle est la probabilité p_3 que les deux boules tirées soient de la même couleur ?
   d) Quelle est la probabilité p_4 que les deux boules tirées soient de couleurs différentes ?
2) On dispose aussi d'une deuxième urne U_2 contenant quatre boules rouges et six boules noires. On tire maintenant deux boules de l'urne U_1 et une boule de l'urne U_2, on suppose que tous les tirages sont équiprobables.
   On considère les événements suivants :
   R : « Les trois boules tirées sont rouges. »
   D : « Les trois boules tirées ne sont pas toutes de la même couleur »
   B : « La boule tirée de l'urne U_2 est rouge ».
   a) Calculer la probabilité de l'événement R.
   b) Quelle est la probabilité de tirer trois boules de même couleur ?
   c) Calculer la probabilité conditionnelle $p_D(B)$, probabilité de l'événement B sachant que l'événement D est réalisé.

On donnera tous les résultats sous forme de fraction irréductible.

Problème (d'après Bac S, Amérique du Nord 1998, 11 points)

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2 on considère la fonction f_n définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f_n(x)=\dfrac{1+n\ln x}{x^2}$.

Partie A

I Etude des fonctions f_n.

1) Calculer $f_n'(x)$ et montrer que l'on peut écrire le résultat sous la forme d'un quotient dont le numérateur est $n-2-2n\ln x$.
2) Résoudre l'équation $f_n'(x)=0$. Etudier le signe de $f_n'(x)$.
3) Déterminer les limites de f_n en $+\infty$ et en 0.
4) Etablir le tableau de variation de f_n et calculer sa valeur maximale en fonction de n.

II Représentation graphique de quelques fonctions f_n.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité graphique 5 cm. On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans ce repère.

1) Tracer $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.
2) Calculer $f_{n+1}(x)-f_n(x)$. Cette différence est-elle dépendante de l'entier n.
3) Expliquer comment il est possible de construire la courbe de $\mathscr{C}_4$ à l'aide de $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$. Tracer $\mathscr{C}_4$

Partie B

Calculs d'aires.

1) Calculer à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $I=\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$.
2) En déduire l'aire en unités d'aire du domaine plan limité par les courbes $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+1}$ et les droites d'équation $x=1$ et $x=e$.
3) On note A_n l'aire en unités d'aire du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}_n$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=e$. Calculer A_2. Déterminer la nature de la suite (A_n) en précisant l'interprétation géométrique de sa raison. Exprimer A_n en fonction de n.

Partie C

Etude sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ de l'équation $f_n(x)=1$.

Dans toute la suite on prendra $n\geq 3$.

1) Vérifier que pour tout n, $e^{\frac{n-2}{2n}}>1$ et $f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right)>1$. En déduire que l'équation $f_n(x)=1$ n'a pas de solution sur l'intervalle $\left]1;e^{\frac{n-2}{2n}}\right[$.
2) On pose pour $t\geq 1$, $\varphi(t)=\dfrac{\ln t}{t}$. Etudier les variations de φ. En déduire que pour tout t appartenant à $]1\,;+\infty[$, $\varphi(t)\leq\dfrac{1}{e}$, puis que pour tout $n\geq 3$, $f_n(n)<1$.
3) Montrer que l'équation $f_n(x)=1$ a exactement une solution α_n sur $\left]e^{\frac{n-2}{2n}},n\right[$. Combien l'équation $f_n(x)=1$ a-t-elle de solutions sur $]0\,;+\infty[$?
4) Calculer $f_n\left(\sqrt{n}\right)$ et montrer que pour tout $n\geq e^2$, $f_n\left(\sqrt{n}\right)>1$. En déduire que pour $n\geq 8$ on a $\sqrt{n}<\alpha_n<n$ et donner la limite de la suite (α_n).