Classe de terminale S_6

Correction du bac blanc du 15mai 2001

Exercice 1)

1) On considère la courbe $\mathscr{C}$ représentée par $\begin{cases} x = f(t) = \dfrac{1}{2}(t^2+2) \\ y = g(t) = \dfrac{1}{2}(t^3+2t) \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

a) $f(-t) = f(t)$ et $g(-t) = -g(t)$, donc on passe de $M(t)$ à $M(-t)$ par réflexion d'axe (Ox). Comme $\mathscr{C}$ est définie sur $\mathbb{R}$, elle est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. **(0,5 point)**

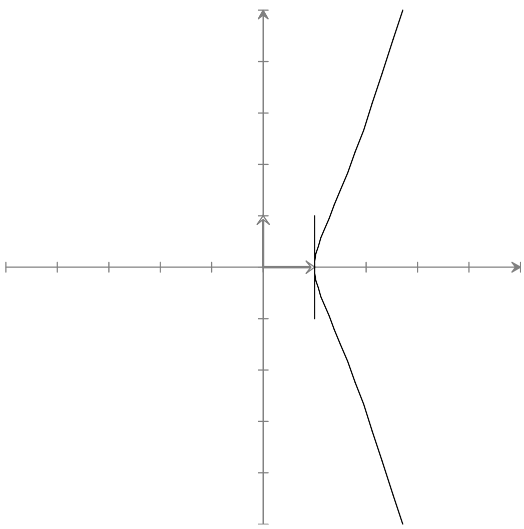
b) f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et on a $f'(t) = t, g'(t) = \dfrac{3}{2}t^2 + 1$. g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$, f est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$, croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$. On a le tableau suivant

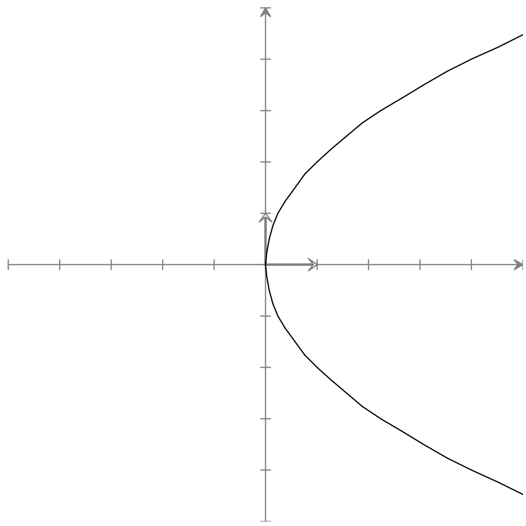
t	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$		1		$+\infty$
g	$-\infty$		0		$+\infty$
g'		$+$		$+$	

(0,75 point)

c) Pour $t = 0$, f' s'annule, mais pas g'. La tangente à $\mathscr{C}$ en $M(0)$ est parallèle à (Oy). Son équation est donc $x = 1$. **(0,5 point)**

d) **(0,5 point)**





2) $\mathscr{P}$ est représentée paramétriquement par $\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = 2t \end{cases}$.

a) x est f est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$, croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, y est croissante sur $\mathbb{R}$. **(0,5 point, 0,5 point pour la courbe).**

b) $\mathscr{D}_t$ est dirigée par le vecteur $\vec{u}(t)\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ c à d $\vec{u}(t)\begin{pmatrix} 2t \\ 2 \end{pmatrix}$. $M\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ appartient à Δ_t si et ssi les vecteurs $\overrightarrow{M_t M}$ et $\vec{u}(t)$ sont orthogonaux, donc une équation de Δ_t est :

$2t(X - t^2) + 2(Y - 2t) = 0 \Leftrightarrow Y = -tX + t^3 + 2t$ **(1 point)**

3) A_t, point d'intersection de Δ_t avec l'axe des abscisses, vérifie $Y = 0$ donc $X = t^2 + 2$. De même, B_t vérifie $X = 0$ donc $Y = t^3 + 2t$. Les coordonnées de I_t sont donc $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(t^2+2) \\ \frac{1}{2}(t^3+2t) \end{pmatrix}$. Le point I_t est défini pour $t \neq 0$, il décrit donc la courbe $\mathscr{C}$ privée du point $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **(0,75 point).**

Exercice 2)

1) On effectue des tirages simultanés dans une urne, il s'agit donc de combinaisons. Ω est l'ensemble des combinaisons de 2 éléments parmi 10, il a donc $C_{10}^2 = 45$ éléments supposés équiprobables **(0,5 point).**
   a) On tire 2 boules rouges parmi les trois possibles, il y a $C_3^2 = 3$ cas favorables, donc $p_1 = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$ **(0,5 point).**
   b) De même, on tire 2 boules noires parmi les sept possibles, il y a $C_7^2 = 21$ cas favorables, donc $p_2 = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$ **(0,25 point).**
   c) L'événement considéré est la réunion disjointe des deux précédents, sa probabilité est donc la somme : $p_3 = p_1 + p_2 = \frac{1}{15} + \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$ **(0,5 point).**
   d) L'événement considéré est le contraire du précédent, sa probabilité est $p_4 = 1 - p_3 = \frac{7}{15}$ **(0,25 point)**
2) Les différents tirages sont équiprobables, et les tirages des différentes urnes sont indépendants entre eux. On peut représenter cette expérience par un arbre pondéré :
   a) La probabilité de tirer trois boules rouges est le produit de la probabilité de tirer deux boules rouges de U_1 et celle de tirer une boule rouge de U_2. La première est calculée au 1) a), la deuxième vaut $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ (il y a 10 boules dont 4 rouges). $p(R) = \frac{1}{15} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{75}$ **(0,5 point).**
   b) L'événement « tirer trois boules de la même couleur » est la réunion disjointe de R et de l'événement « tirer trois boules noires ». Comme ci-dessus, la probabilité de tirer trois boules noires est égale à $\frac{7}{15} \times \frac{3}{5} = \frac{7}{25}$, la probabilité recherchée est donc $\frac{2}{75} + \frac{7}{15} = \frac{23}{75}$ **(0,5 point).**

c) On sait que $p_D(B)=\dfrac{p(B\cap D)}{p(D)}$. D est l'événement contraire de celui de la question b), donc $p(D)=1-\dfrac{23}{75}=\dfrac{52}{75}$. D'autre part, B∩D est l'événement « on tire une rouge de U_2 mais pas deux rouges de U_1 », sa probabilité est donc $\dfrac{2}{5}(1-\dfrac{1}{15})=\dfrac{28}{75}$. Finalement, $p_D(B)=\dfrac{\frac{28}{75}}{\frac{52}{75}}=\dfrac{28}{52}=\dfrac{7}{13}$ **(1 point).**

Problème

f_n est définie pour $n \geqslant 2$ par $f_n(x) = \dfrac{1 + n\ln x}{x^2}$.

Partie A

I (2,5 points)

1) f_n est dérivable par quotient et $f_n'(x) = \dfrac{\frac{n}{x}x^2 - 2x(1 + n\ln x)}{x^4} = \dfrac{n - 2 - 2n\ln x}{x^3}$ **(0,5 point).**

2) $f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow n - 2 - 2n\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \dfrac{n-2}{2n} \Leftrightarrow x = e^{\frac{n-2}{2n}}$ car ln est bijective sur]0 ; +∞[**(0,25 point).**

Comme x est positif, $f_n'(x) > 0 \Leftrightarrow n - 2 - 2n\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < \dfrac{n-2}{2n} \Leftrightarrow 0 < x < e^{\frac{n-2}{2n}}$ car ln est strictement croissant sur]0 ; +∞[**(0,5 point).**

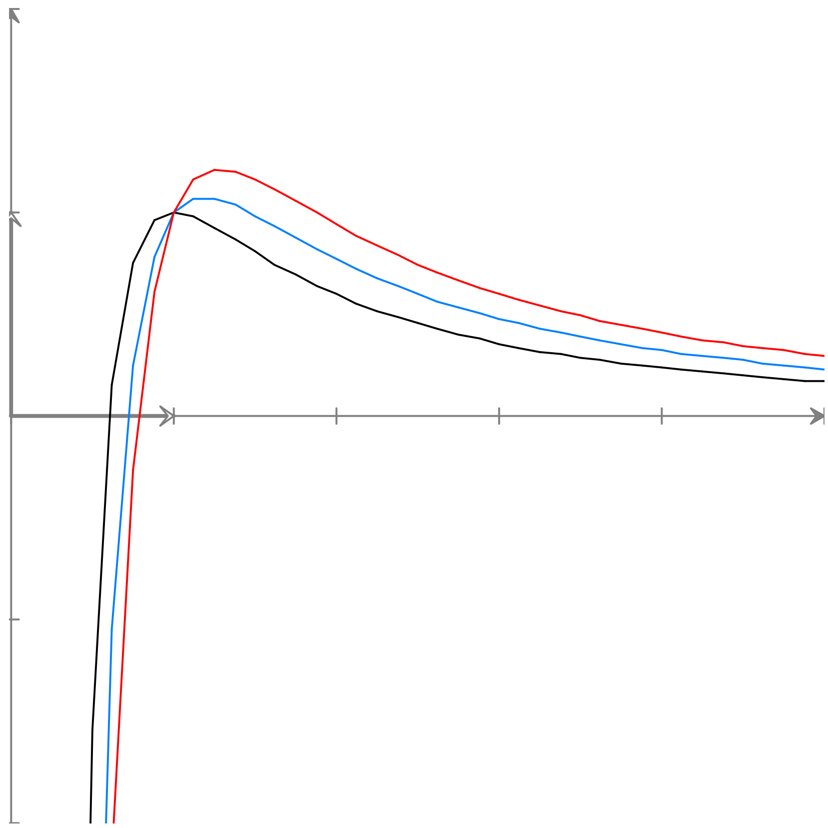
3) $f_n(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{n\ln x}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$ (croissances comparées) donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, $n > 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} 1 + n\ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = -\infty$ par produit **(0,25 chaque).**

4) f_n est strictement croissante sur]0 ; $e^{\frac{n-2}{2n}}$ [et strictement décroissante sur] $e^{\frac{n-2}{2n}}$; +∞[. Son maximum vaut $f_n(e^{\frac{n-2}{2n}}) = \dfrac{1 + n\frac{n-2}{2n}}{e^{\frac{n-2}{n}}} = \dfrac{n}{2e^{\frac{n-2}{n}}}$ **(en tout 0,75 point)**

II (2,25 points)

1)



En tout **1,25 point** pour les courbes.

2) $f_{n+1}(x)-f_n(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$. Cette différence ne dépend pas de n. **(0,5 point)**

3) Il résulte du 2) que pour tout x, $f_4(x)-f_3(x)=f_3(x)-f_2(x)$. Si on appelle M_2, M_3, M_4 les points respectifs de $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, $\mathscr{C}_4$ de même abscisse x, on a $\overrightarrow{M_3M_4}=\overrightarrow{M_2M_3}$, autrement dit M_4 est l'image de M_3 par translation de vecteur $\overrightarrow{M_2M_3}$. On peut ainsi construire $\mathscr{C}_4$ à partir de $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$. On peut aussi dire que M_4 est le symétrique de M_2 par rapport à M_3 **(0,5 point).**

Partie B (2,75 points)

1) Calculons $I=\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$ par parties en posant $u(x)=\ln x, v'(x)=\dfrac{1}{x^2}$ donc $u'(x)=\dfrac{1}{x}, v(x)=\dfrac{-1}{x}$.

$$I=\left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{-1}{x^2}dx=-\frac{1}{e}-\left[\frac{1}{x}\right]_1^e=1-\frac{2}{e}.$$ **(0,75 point).**

2) Comme sur l'intervalle [1 ; e], $f_{n+1}(x)-f_n(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}\geq 0$, l'aire limitée par $\mathscr{C}_n$, $\mathscr{C}_{n+1}$, les droites d'équation $x=1$ et $x=e$ vaut $\displaystyle\int_1^e(f_{n+1}(x)-f_n(x))dx$, c'est à dire I. **(0,5 point).**

3) Pour tout n, f_n est positive sur [1 ; e] car ln est positif sur cet intervalle, donc $A_n=\displaystyle\int_1^e f_n(x)dx$, **(0,25 point)** et en particulier :

$$A_2=\int_1^e f_2(x)dx=\int_1^e\frac{1+2\ln x}{x^2}=\int_1^e\frac{dx}{x^2}+2I=\left[\frac{-1}{x}\right]_1^e+2\left(1-\frac{2}{e}\right)=3-\frac{5}{e}.$$ **(0,5 point)**

D'autre part, $A_{n+1}-A_n=\displaystyle\int_1^e f_{n+1}(x)dx-\int_1^e f_n(x)dx=I$ par linéarité. Cette différence étant indépendante de n, (A_n) est une suite arithmétique de raison I, donc pour tout n on a :

$$A_n=A_2+(n-2)I=3-\frac{5}{e}+(n-2)\left(1-\frac{2}{e}\right)=1-\frac{1}{e}+n\left(1-\frac{2}{e}\right).$$ **(0,5 point)**

La raison de (A_n) est l'aire calculée au 2). **(0,25 point)**

Partie C (3,5 points)

1) Si $n\geq 3$, $\dfrac{n-2}{2n}>0$ donc $e^{\frac{n-2}{2n}}>1$ (l'exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$). Comme f_n est strictement croissante sur $\left]1;e^{\frac{n-2}{2n}}\right[$ et que $f_n(1)=1$, l'équation $f_n(x)=1$ n'a pas de solution sur cet intervalle. **(0,5 point).**

2) On pose pour $t\geq 1$, $\varphi(t)=\dfrac{\ln x}{x}$. φ est dérivable par quotient et $\varphi'(t)=\dfrac{1-\ln t}{t^2}$, donc est du signe de $1-\ln t$. Or $1-\ln t>0\Leftrightarrow \ln t<1\Leftrightarrow 1\leq t<e$ car ln est strictement croissante. On en déduit que φ est croissante sur [1 ; e] et décroissante sur [e ; $+\infty$[, son maximum est donc $\varphi(e)=\dfrac{1}{e}$, donc pour tout t appartenant à [1 ; $+\infty$[$\varphi(t)\leq\dfrac{1}{e}$. **(0,75 point)**

Comme $f_n(n)=\dfrac{1+n\ln n}{n^2}=\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{\ln n}{n}$, pour tout $n\geq 3$, $f_n(n)\leq\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{e}<1$. **(0,25 point)**

3) La fonction f_n est dérivable et strictement décroissante sur $\left[e^{\frac{n-2}{2n}}, n\right]$, c'est donc une bijection de $\left[e^{\frac{n-2}{2n}}, n\right]$ sur $\left[f_n(n); f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right)\right]$. Comme $f_n(n) < 1 < f_n\left(e^{\frac{n-2}{2n}}\right)$ d'après les questions 1) et 2), l'équation $f_n(x) = 1$ admet exactement une solution α_n sur $\left[e^{\frac{n-2}{2n}}, n\right]$. **(0,75 point)**. f_n est strictement croissante sur $\left]0; e^{\frac{n-2}{2n}}\right[$, donc elle ne peut y prendre la valeur 1 qu' une fois, et f_n est strictement décroissante sur $\left[e^{\frac{n-2}{2n}}, +\infty\right[$ donc elle ne peut y prendre la valeur 1 qu'une fois. L'équation $f_n(x) = 1$ admet exactement deux solutions : 1 et α_n. **(0,25 point)**

4) $f_n\left(\sqrt{n}\right) = \dfrac{1 + n\ln\sqrt{n}}{n} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2}\ln n$. Ainsi, si $n \geq e^2$, $\ln n \geq 2$ car ln est croissante, et $f_n\left(\sqrt{n}\right) > 1$. **(0,5 point).** Comme si $n \geq 8$ alors $n \geq e^2$, et que f_n est décroissante sur $[\alpha_n; +\infty[$, comme $f_n\left(\sqrt{n}\right) > f_n(\alpha_n)$, on a nécessairement $\sqrt{n} < \alpha_n$. Par comparaison, la suite (α_n) a pour limite $+\infty$. **(0,5 point).**