Correction du contrôle de spécialité n°7

Exercice 1)

1) On considère l'équation (E) : $18a + 23b = 2001$

a) On remarque que $2001 = 3\times23\times29$, et que 3 et 23, étant tous deux premiers, sont premiers entre eux. Si $(a\ ;\ b)$ est une solution de (E), alors $18a = 2001 - 23b = 23(87 - b)$. 23 divise donc $18a$, et comme 23, premier ne divisant pas 18, est premier avec 18, 23 divise a d'après le théorème de Gauss. De même, on a $23b = 2001 - 18a = 3(667 - a)$, 3 divise $23b$ et 3 est premier avec 23 donc 3 divise b. On a bien prouvé que a était multiple de 23 et que b était multiple de 3. (3 points)

b) Cherchons une solution de (E). On pourrait appliquer la méthode du cours, mais il est possible d'utiliser la question précédente et de poser $a = 23a'$ et $b = 3b'$. On obtient alors $18\times23a' + 23\times3b' = 2001$, puis en simplifiant par $69 = 3\times23$: $6a' + b' = 29$. Cette nouvelle équation admet des tas de solutions évidentes, par exemple $a' = 4$ et $b' = 5$, ce qui fournit la solution (92 ; 15) (on aurait pu aussi donner directement la solution (0 ; 87), ce qui était encore plus court). (2 points)

c) On a vu au b) que l'équation (E) entraînait l'équation (E') : $6a' + b' = 29$ en posant $a = 23a'$ et $b = 3b'$. Or (E') a pour solution $\{(k\ ;\ 29 - 6k),\ k \in\mathbb{Z}\}$. On obtient comme solutions possibles de (E) les couples $(23k\ ;\ 87 - 18k)$, $k \in\mathbb{Z}$. Il ne reste plus qu'à vérifier qu'ils conviennent, ce qui est évident. (2 points)

2) On cherche maintenant les couples d'entiers p et q dont le pgcd d et le ppcm m vérifient l'équation (E). On sait d'après les résultats précédents que d est un multiple de 23. D'autre part, m étant un multiple de a et b et d un diviseur de a et b, m est un multiple de d. Comme d divise $18d$, et que d divise m, d doit diviser 2001. Il ne reste plus beaucoup de possibilités à d(il doit être multiple de 23 et diviseur de 2001), d peut être égal *à* 23, 69, 667 ou 2001 (correspondant aux valeurs de k 1, 3, 29 et 87). On en déduit les valeurs correspondantes de m (qui est égal à $87 - 18k$) : 69, 33, -535, -1479. Comme m doit être positif et multiple de d, il ne reste que $d = 23$ et $m = 69$. Les deux entiers p et q devant être multiples de 23 et diviseurs de 69 ne peuvent être égaux qu'à 23 ou 69. S'ils valent tous deux 23, leur ppcm vaut 23, et s'ils valent tous deux 69, leur pgcd vaut 69. Les deux seul couples restant sont donc (23 ; 69) et (69 ; 23). (3 points)

Exercice 2)

1) Si d divise a et b, il divise aussi $a - b$. D'autre part, s'il divise a et $a - b$, il divise aussi $a - (a - b) = b$. Il en résulte que les couples $(a\ ;\ b)$ et $(a\ ;\ a - b)$ ont les mêmes diviseurs communs, et donc le même pgcd. Comme $(n + 3) - (n - 1) = 4$, le pgcd de $(n + 3)$ et $(n - 1)$ est le même que celui de $(n + 3)$ et 4. Ce pgcd devant donc diviser 4, il peut prendre les valeurs 1, 2 et 4. (3 points)

2) $n - 1$ divise $n + 3$ si et ssi $n - 1$ est le pgcd de $(n - 1)$ et $(n + 3)$, donc si et ssi il est le pgcd de $n + 3$ et 4. $n - 1$ doit donc être égal à 1, 2 ou 4, et donc n égal à 2, 3 ou 5. $n + 3$ vaudrait alors respectivement 5, 6 ou 8, et on vérifie aisément que dans ces trois cas $n - 1$ divise bien $n + 3$. (Cette vérification est obligatoire car on a raisonné par « donc »). Les valeurs possibles de n sont 2, 3 et 5. (3 points)

3) On observe que $n^2 + 2n - 2 = (n - 1)(n + 3) + 1$. D'après l'algorithme d'Euclide, le pgcd de $n^2 + 2n - 2$ et $n - 1$ vaut 1, et ces entiers sont donc premiers entre eux. (2 points)

4) D'après le théorème de Gauss, si $n - 1$ divise $(n + 3)(n^2 + 2n - 2)$, comme il est premier avec $n^2 + 2n - 2$, il divise $n + 3$, et n vaut donc 2, 3 ou 5 d'après la question 2. Essayons :
Pour $n = 2$, $(n - 1)(2n + 1) = 5$ et $(n + 3)(n^2 + 2n - 2) = 30$, et 5 divise 30.
Pour $n = 3$, $(n - 1)(2n + 1) = 14$ et $(n + 3)(n^2 + 2n - 2) = 78$, et 14 ne divise pas 78.
Pour $n = 5$, $(n - 1)(2n + 1) = 44$ et $(n + 3)(n^2 + 2n - 2) = 264$, et 44 divise 264.
Les solutions sont donc 2 et 5. (3 points)