

Devoir de mathématiques

N°6

Exercice 1) (d'après Bac S, 1995, 12 points)

Dans ce problème, on étudie successivement les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = xe^{-x} \text{ et } g(x) = f(x) + [f(x)]^2$$

Partie A : étude de f

- 1) Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R} , calculer sa dérivée f' , étudier le sens de variation de f .
- 2) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
- 3) Donner le tableau de variation de f
- 4) Montrer que l'équation $f(x) = -\frac{1}{2}$ admet une solution α unique sur \mathbb{R} , donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

Partie B : Etude de g

- 1) Justifier que g est dérivable sur \mathbb{R} et que l'on a pour tout x : $g'(x) = f'(x)[1 + 2f(x)]$.
- 2) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$
- 3) Donner le tableau de variation de g (on calculera la valeur exacte de $g(\alpha)$)
- 4) a) Etablir que pour tout réel x , on a : $g(x) - x = xe^{-x}(1 + xe^{-x} - e^x)$
 b) Montrer que pour tout réel x , on a : $1 + xe^{-x} \leq 1 + x \leq e^x$
 c) Préciser la position de la courbe de g par rapport à sa tangente à l'origine.

Exercice 2) (8 points)

On appelle f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^{-x} - 1}{\sqrt{x}}$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$.

- 1) Prouver que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-t} - 1}{t} = -1$
- 2) En déduire la continuité de f en 0.
- 3) Etudier le signe de $f(x)$.
- 4) Etudier la limite de f en $+\infty$.
- 5) Montrer que l'on a pour tout $x > 0$: $f'(x) = \frac{1 - e^{-x} - 2xe^{-x}}{2x\sqrt{x}}$.
- 6) Etudier les variations de f à l'aide d'une fonction auxiliaire.
- 7) Etudier la dérivabilité de f en 0 (on sera amené à utiliser la question 1)