Classe de terminale S_4

Corrigé du Ds n°6

Exercice 1)

Dans cet exercice, on étudie successivement la fonction *f* définie sur ℝ par $f(x) = xe^{-x}$ et *g* définie sur ℝ par $g(x) = f(x) + [f(x)]^2$.

Partie A : étude de *f* (5 points)

1) *f* est dérivable sur ℝ car elle est le produit des fonctions $x \to x$ affine, et $x \to e^{-x}$ qui est dérivable par composition. On a pour tout *x* : $f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$, $f'(x)$ est donc du signe de 1 – *x* car l'exponentielle est toujours positive. *f* est donc strictement croissante sur]–∞ ; 1] et strictement décroissante sur [1 ; +∞[**(2 points)**

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ d'après les croissances comparées de l'exponentielle et des polynômes. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ par composition, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ par produit. **(1,25 point)**

3) On a donc le tableau suivant **(0,5 point)**

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

4) La fonction *f* est décroissante sur [1 ; +∞[et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, donc l'équation $f(x) = -\frac{1}{2}$ n'a pas de solution sur cet intervalle.
f est continue (car elle est dérivable) sur ℝ donc sur]–∞ ; 1], et elle est strictement croissante de]–∞ ; 1] vers]–∞ ; e^{-1}]. Comme $-\frac{1}{2}$ appartient à]–∞ ; e^{-1}] il a d'après le théorème des valeurs intermédiaires un unique antécédent α sur cet intervalle. L'équation $f(x) = -\frac{1}{2}$ a donc une solution unique sur ℝ. On obtient $-0{,}36 < \alpha < -0{,}35$ **(1,25 point)**

Partie B : étude de *g* (7 points)

1) *f* est dérivable sur ℝ donc *g* est dérivable sur ℝ par somme et produit. On a pour tout *x* : $g(x) = f(x) + f(x) \times f(x)$ donc :
$g'(x) = f'(x) + f'(x) \times f(x) + f(x) \times f'(x) = f'(x)[1 + 2f(x)]$ **(1,5 point)**

2) $g(x) = f(x)[1 + f(x)]$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ par somme et produit.
$g(x) = f(x) + [f(x)]^2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ par somme et produit. **(1,25 point)**

3) Les variations de *g* sont données par le signe de *g'*(*x*). On connaît le signe de *f'*(*x*), il reste à étudier celui de 1 + 2*f*(*x*) :
$1 + 2f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq -\frac{1}{2}$. Or $f(\alpha) = -\frac{1}{2}$, et d'après le tableau de variation de *f*, cette inégalité est vérifiée si et seulement si $x \geqslant \alpha$. On a donc :

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$1 + 2f(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	0

$g(1) = f(1) + f(1)^2 = e^{-1} + e^{-2}$. $g(\alpha) = f(\alpha) + f(\alpha)^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$ **(1,25 point)**

4) a) $g(x)-x = xe^{-x}+x^2e^{-2x}-x = xe^{-x}(1+xe^{-x}-\frac{1}{e^{-x}}) = xe^{-x}(1+xe^{-x}-e^{x})$ **(0,5 point)**

b) Posons $h(x)=e^x-1-x$. On a alors $h'(x)=e^x-1$, donc h est décroissante sur]–∞ ; 0] et croissante sur [0 ; +∞[. Comme $h(0) = 0$, h est positive sur ℝ, et pour tout x : $e^x \le 1+x$.

Posons $k(x)=1+x-(1+xe^{-x}) = x-xe^{-x} = x(1-e^{-x})$. Si $x \geqslant 0$, alors $-x \leqslant 0$ donc, comme l'exponentielle est croissante sur ℝ, $e^{-x}\le 1$ et $1-e^{-x}\ge 0$. k est donc positive sur [0 ; +∞[. Sur l'intervalle]–∞ ; 0], on a $e^{-x}\ge 1$ et k est aussi positive. Finalement k est donc positive sur ℝ, et on a pour tout x : $1+xe^{-x}\le 1+x\le e^x$ **(1,75 point)**

c) g(0) = 0, g'(0) = 1, donc la tangente à la courbe de g a l'origine a pour équation $y = x$. La position de la courbe par rapport à sa tangente est donc données par le signe de $g(x)–x$, soit de $xe^{-x}(1+xe^{-x}-e^x)$. Comme d'après le b) $1+xe^{-x}-e^x$ est négatif pour tout x, le signe de $g(x) – x$ est l'opposé de celui de x. Ainsi sur]–∞ ; 0] la courbe de g est au dessus de sa tangente à l'origine, et sur]0 ; +∞] elle est en dessous **(0,75 point)**

Exercice 2)

f est définie sur]0 ; +∞] par $f(x)=\frac{e^{-x}-1}{\sqrt{x}}$, et $f(0) = 0$.

1) On reconnaît dans $\frac{e^{-t}-1}{t}$ la forme $\frac{g(t)-g(0)}{t}$ avec $g(t)=e^{-t}$. La limite $\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^{-t}-1}{t}$ vaut donc par définition à $g'(0)$. Comme $g'(t)=-e^{-t}$, $g'(0)=-1$ et $\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^{-t}-1}{t}=-1$. **(1 point).**

2) On remarque que $f(x)=\frac{e^{-x}-1}{\sqrt{x}}=\frac{e^{-x}-1}{x}\times\sqrt{x}$. On a donc d'après la question précédente $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{\sqrt{x}}=0=f(0)$, et f est donc continue en 0. **(0,75 point)**

3) $x > 0$, donc $–x < 0$ et, comme l'exponentielle est croissante sur ℝ, $e^{-x}\le 1$ et $e^{-x}-1\le 0$. Comme $\sqrt{x}>0$, f est négative sur]0 ; +∞[**(1 point)**

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}-1=-1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}-1}{\sqrt{x}}=0$ par somme et quotient **(0,75 point)**

5) f est un quotient, et pour tout $x > 0$:

$$f'(x)=\frac{-e^{-x}\sqrt{x}-(e^{-x}-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{-e^{-x}\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}-(e^{-x}-1)}{2x\sqrt{x}}=\frac{-2xe^{-x}-e^{-x}+1}{2x\sqrt{x}}$$ **(1 point)**

6) Posons pour $x > 0$, $h(x)=1-e^{-x}-2xe^{-x}$. On a $h'(x)=e^{-x}-2e^{-x}+2xe^{-x}=(2x-1)e^{-x}$. h est donc décroissante sur]0 ; $\frac{1}{2}$] et croissante sur [$\frac{1}{2}$; +∞[. Comme $h(0) = 0$, que $h(\frac{1}{2})<0$ et que d'après les théorèmes de croissance comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=1$, d'après le théorème des valeurs intermédiares (h est continue sur]0 ; +∞]) l'équation $h(x) = 0$ a une solution unique a sur [$\frac{1}{2}$; +∞[. D'après l'étude précédente, h est négative sur]0 ; a] et positive sur [a ; +∞[. f' est du signe de h, donc f est décroisante sur]0 ; a] et croissante sur [a ; +∞[. **(1,5 point)**

7) Etudions $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$: $\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{e^{-x}-1}{x\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{e^{-x}-1}{x}$. Comme d'après la question 1) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^{-t}-1}{t}=-1$, et que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-\infty$ et f n'est pas dérivable en 0 (mais sa courbe admet une tangente verticale) **(1 point)**