**Classe de terminale S5** **Vendredi 18 octobre 2002**

# Devoir de mathématiques

## N°4

### Exercice 1) (type bac, 12 points)

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^3-4}{x^2+1}$ et on appelle $C$ da courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité 1 cm.

**1) Etude d'une fonction auxiliaire**

On appelle $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3+3x+8$.

a) Etudier le sens de variation de $g$.

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution unique $\alpha$ dont on donnera un encadrement d'amplitude 0,1.

c) Préciser le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de $x$.

**2) Etude des variations de *f***

a) Etudier les limites de $f$ en $-\infty$ et $+\infty$.

b) Calculer la dérivée $f'$ de $f$ et étudier les variations de $f$.

c) Démontrer que $f(\alpha)=\dfrac{3}{2}\alpha$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

d) Tracer la tableau de variations de $f$.

**3) Tracé de *C***

a) Montrer qu'il existe quatre réels $a$, $b$, $c$, $d$ tels que pour tout $x$ : $f(x)=ax+b+\dfrac{cx+d}{x^2+1}$

b) En déduire que la droite $\Delta$ d'équation $y = x$ est asymptote à $C$. Etudier la position de $C$ par rapport à $\Delta$ et préciser les coordonnées de leur point d'intersection $A$.

c) Déterminer les abscisses des points $B$ et $B'$ où $C$ admet une tangente parallèle à $\Delta$.

d) Tracer $\Delta$ et $C$ en précisant les points $A$, $B$ et $B'$

### Exercice 2) (sorti tout droit de mon cerveau malade, 8 points)

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on appelle $f_n$ la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par :

$f_n(x)=x^n+x^{n-1}+...+x^2+x$

1) Quel est le sens de variation de $f_n$ ? Exprimer $f_n(x)$ à l'aide du symbole $\Sigma$.

2) Montrer que l'équation $f_n(x)=1$ a une unique solution que l'on notera $a_n$.

3) Montrer que $f_n\left(\dfrac{1}{2}\right)=1-\dfrac{1}{2^n}$, en déduire que pour tout $n \geqslant 1$ on a $a_n>\dfrac{1}{2}$

4) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $f_{n+1}(a_n)=a_n^{n+1}+1$. En déduire que $a_{n+1}\leq a_n$.

5) Montrer que la suite $(a_n)$ converge vers une limite $l$ et que $\dfrac{1}{2}\leq l$. En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $1-\dfrac{1}{2^n}\leq f_n(l)$.

6) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $f_n(l)\leq 1$. En déduire la limite de la suite $(f_n(l))$.

7) Montrer que $f_n(l)=l\dfrac{1-l^n}{1-l}$. En déduire que $\dfrac{l}{1-l}=1$, puis la valeur de $l$.