Classe de terminale S_5

Correction du DS n°4

Exercice 1)

f est la fonction définie sur ℝ par $f(x)=\dfrac{x^3-4}{x^2+1}$.

1) On appelle g la fonction définie sur ℝ par $g(x)=x^3+3x+8$.

a) g est dérivable car c'est un polynôme, et pour tout réel x, $g'(x)=3x^2+3$ est strictement positif. Il en résulte que g est strictement croissante sur ℝ. (on aurait aussi pu écrire que g était la somme des deux fonctions strictement croissantes $x\to x^3$ et $x\to 3x+8$)

b) g étant strictement croissante sur ℝ, l'équation $g(x)=0$ admet au maximum une solution. D'autre part, g est continue sur ℝ, $g(-2)=-6$, $g(-1)=4$. Comme $0\in[-6;4]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x)=0$ admet au minimum une solution sur $[-2;-1]$. Finalement l'équation $g(x)=0$ admet exactement une solution réelle α. On obtient à la calculatrice $-1,6<\alpha<-1,5$.

c) Comme g est strictement croissante sur ℝ et que $g(\alpha)=0$, g est négative sur $]-\infty,\alpha[$ et positive sur $]\alpha,+\infty[$

2) Etude de *f*.

a) Si $x\neq 0$, on a $f(x)=\dfrac{x^3\left(1-\dfrac{4}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}=x\dfrac{1-\dfrac{4}{x^3}}{1+\dfrac{1}{x^2}}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$, on a par somme, produit et quotient que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

b) Pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{3x^2(x^2+1)-2x(x^3-4)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{x^4+3x^2+8x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$. $f'(x)$ est du signe de $xg(x)$, donné par le tableau suivant (le signe de g a été obtenu précédemment) :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$xg(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\alpha[$ et sur $]0\,;+\infty[$, strictement décroissante sur $]\alpha\,;0[$.

c) On sait que $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^3-4}{\alpha^2+1}$, mais α n'est pas n'importe qui, il vérifie $\alpha^3+3\alpha+8=0$; On peut donc remplacer α^3 par $-3\alpha-8$. Pour se débarrasser du dénominateur, il faut avoir l'idée de multiplier en haut et en bas par α. Nous obtenons alors :

$$f(\alpha)=\frac{\alpha^3-4}{\alpha^2+1}=\alpha\frac{\alpha^3-4}{\alpha^3+\alpha}=\alpha\frac{-3\alpha-8-4}{-3\alpha-8+\alpha}=\alpha\frac{-3\alpha-12}{-2\alpha-8}=\alpha\frac{-3(\alpha+4)}{-2(\alpha+4)}=\frac{3}{2}\alpha.$$

Comme $-1,6<\alpha<-1,5$, on en déduit que $-2,4<f(\alpha)<-2,25$

d) Finalement, compte tenu des résultats précédents:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	$\frac{3}{2}\alpha$	↘	-4	↗	$+\infty$

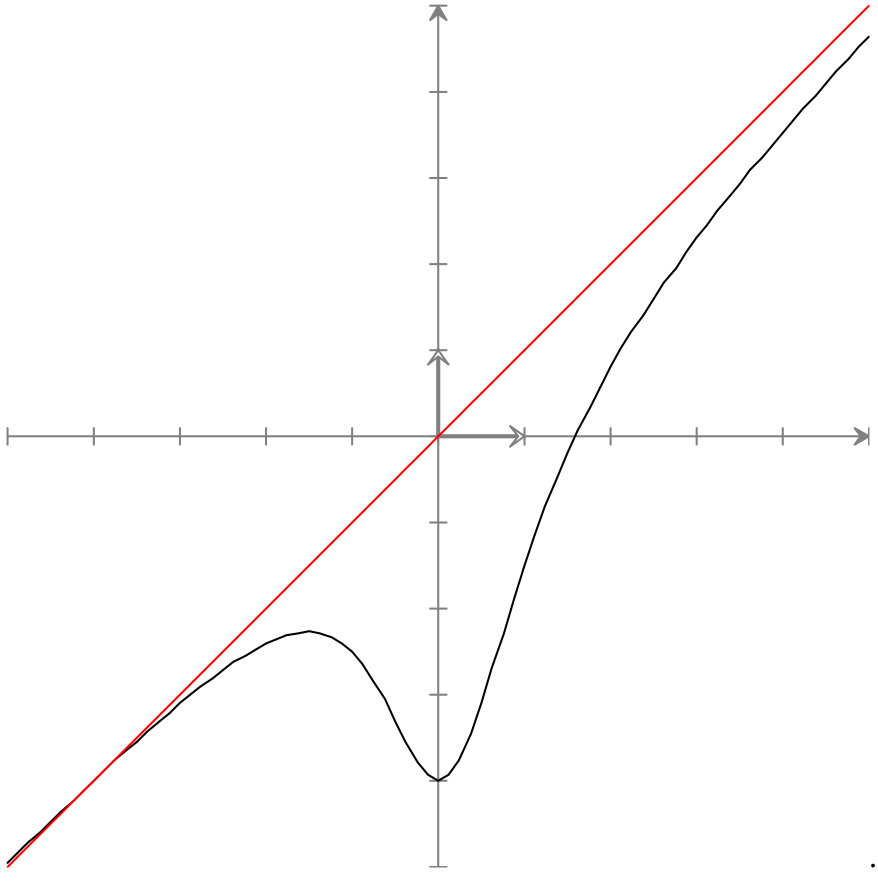
3) Tracé de la courbe représentative *C* de *f*.

a) Pour tout réel *x*, $f(x)=\dfrac{x^3-4}{x^2+1}=\dfrac{x^3+x-x-4}{x^2+1}=\dfrac{x(x^2+1)-x-4}{x^2+1}=x+\dfrac{-x-4}{x^2+1}$.

b) Posons $h(x)=f(x)-x=\dfrac{-x-4}{x^2+1}$. On peut écrire, si $x\neq 0$, $h(x)=\dfrac{1}{x}\dfrac{-1-\dfrac{4}{x}}{1+\dfrac{1}{x^2}}$, et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=0$ par somme, produit et quotient, donc Δ d'équation $y=x$ est asymptote à *C*. Leurs positions relatives sont données par le signe de *h*, qui est celui de $-x-4$, donc sur]–∞ ; –4[*h* est positif et *C* est au dessus de Δ, et sur]–4 ; +∞[*h* est négatif et *C* est en dessous de Δ. Le point d'intersection de *C* et Δ a pour abscisse la solution de l'équation $h(x)=0$, qui est –4. On a donc $A(-4;-4)$.

c) Une tangente à *C* est parallèle à Δ quand son coefficient directeur est égal à 1. Or le coefficient directeur d'une tangente est donné par *f'*, on est donc amené à résoudre l'équation $f'(x)=1\Leftrightarrow\dfrac{x^4+3x^2+8x}{(x^2+1)^2}=1\Leftrightarrow x^4+3x^2+8x=x^4+2x^2+1\Leftrightarrow x^2+8x+1=0$. Le discriminant de cette dernière équation est égal à 68, elle a donc pour solution, après simplification, $b=-4-\sqrt{17}$ et $b'=-4+\sqrt{17}$ qui sont les abscisses des points recherchés.

d)



Remarque : pour les purs et durs de l'algèbre, la valeur exacte de *a* est

$$a=\sqrt[3]{\sqrt{17}-4}-\sqrt[3]{\sqrt{17}+4}$$

ce qu'il est facile de prouver depuis les formules de Cardan (il leur a donné son nom, les a publiées dans son *Ars magna sive de regulis algebraicis* en 1545, mais il les a en fait extorquées à Tartaglia, qui s'est plaint du plagiat, mais qui a eu de la chance de se tirer indemne de la querelle qui s'est ensuivie, car

Cardan était très puissant à l'époque). Cardan faisait beaucoup d'astrologie, il est même allé jusqu'à dresser l'horoscope de Jésus Christ. Il est mort en 1576, et, ayant prévu par des calculs astrologiques le moment exact où il devait mourir, on pense qu'il a cessé de s'alimenter pour que ses calculs soient justes (ce qui est le comble de l'orgueil pour un astrologue)

La formule dite de Cardan : l'équation $x^3 = px + q$ a pour solution $\sqrt[3]{\dfrac{q+\sqrt{q^2-\frac{4p^3}{27}}}{2}}+\sqrt[3]{\dfrac{q-\sqrt{q^2-\frac{4p^3}{27}}}{2}}$ si $p > 0$ (et $q^2 - \frac{4p^3}{27} \geq 0$), et $\sqrt[3]{\dfrac{q+\sqrt{q^2-\frac{4p^3}{27}}}{2}}-\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{q^2-\frac{4p^3}{27}}-q}{2}}$ si $p < 0$. On obtient ce résultat en posant $x = u + v$, alors $x^3 = (u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = 3uv(u+v) + u^3 + v^3 = 3uv(x) + u^3 + v^3$. x est donc solution si $\begin{cases} 3uv = p \\ u^3 + v^3 = q \end{cases}$, et en posant $\begin{cases} U = u^3 \\ V = v^3 \end{cases}$, on obtient $\begin{cases} U + V = q \\ UV = \dfrac{p^3}{27} \end{cases}$, ce qui nous donne par substitution $\begin{cases} V = q - U \\ U^2 - qU + \dfrac{p^3}{27} = 0 \end{cases}$, il ne reste plus qu'à résoudre l'équation du second degré, puis à prendre les racines cubiques de U et V pour trouver x. (C'est beau, l'algèbre…)