***Classe de Terminale $S_6$*** ***Mercredi 18 Octobre 2000***

## ***Devoir de mathématiques***

## ***N°4***

### ***Exercice 1) (Bac C, Amiens, 1984, extrait) (10 points)***

1) $n$ étant un entier naturel, on appelle $f_n$ la fonction définie sur ]-∞ ; 1] par $f_n(x) = x^n\sqrt{1-x}$, et on appelle $C_n$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.
2) Etudier la dérivabilité de *fn* en 1, calculer sa dérivée.
3) Etudier la limite de $f_n$ en -∞ (on distinguera 2 cas : $n$ pair ou $n$ impair).
4) Déterminer l'unique élément $a_n$ de ]0 ; 1[ tel que $f_n'(a_n) = 0$ pour $n \geq 1$.
5) Etudier pour $n \geq 1$ les variations de $f_n$, donner son tableau de variations (on distinguera 2 cas : $n$ pair ou $n$ impair).
6) a) Calculer la différence $f_{n+1}(x) - f_n(x)$, étudier son signe, en déduire la position relative des courbes $C_n$ et $C_{n+1}$.
   b) Etudier la position relative des courbes $C_n$ et $C_{n+2}$.
7) Tracer $C_1$ et $C_2$

### ***Exercice 2) (5 points)***

Pour les deux fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition et étudier les limites aux bornes : $f$ définie par $f(x) = \sqrt{x^2+x+2} + x$, $g$ définie par $g(x) = \dfrac{x^3+2x^2-5x-6}{x^2-2x}$.

### ***Exercice 3) (5 points)***

1) On appelle $f$ la fonction définie sur [1 ; +∞[ par $f(x) = x(x-1)^2$. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ a une solution $a$ unique dans [1 ; 2].
2) On appelle $g$ la fonction définie sur [1 ; +∞[ par $g(x) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Montrer que l'équation $g(x) = x$ a le même ensemble de solutions que l'équation $f(x) = 1$.
3) a) Montrer que pour tout $x$ de [1 ; +∞[, $|g'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.

   b) En déduire que pour tout $x$ de [1 ; +∞[, $|g(x) - a| \leq \dfrac{1}{2}|x-a|$ (*cette question n'est plus au programme de TS* )