Classe de Terminale S_6

Corrigé du DS n°4

Exercice 1)

Pour tout entier naturel non nul *n*, on appelle f_n la fonction définie sur]–∞ ; 1] par $f_n(x) = x^n\sqrt{1-x}$.

1) La fonction $x \to x^n$ est dérivable sur]–∞ ; 1] (c'est un polynôme) , et la fonction $x \to \sqrt{1-x}$, conposée de $x \to 1-x$, dérivable de]-∞ ; 1] sur [0 ; +∞[et de $t \to \sqrt{t}$, dérivable sur]0 ; +∞[, est dérivable sur]–∞ ; 1[par composition. La fonction *f* est donc dérivable sur]–∞ ; 1[par produit. **(0,5 point).**

   Etude en 1 : pour tout *x* de]–∞ ; 1[, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{x^n\sqrt{1-x}}{x-1} = -\dfrac{x^n}{\sqrt{1-x}}$ car $f(1)=0$ et $x-1 = -(\sqrt{1-x})^2$. On a $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{1-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 1} -\dfrac{x^n}{\sqrt{1-x}} = -\infty$. La fonction *f* n'est donc pas dérivable en 1, mais sa courbe admet en son point d'abscisse 1 une tangente parallèle à l'axe des ordonnées. **(1 point).**

2) La dérivée de $x \to x^n$ est $x \to nx^{n-1}$, et celle de $x \to \sqrt{1-x}$ est $x \to \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}$ par composition. On a donc pour tout *x* de]–∞ ; 1[:

$$f_n'(x) = nx^{n-1}\sqrt{1-x} - \frac{x^n}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2nx^{n-1}(1-x)-x^n}{2\sqrt{1-x}}$$

(2 points)

$$= \frac{x^{n-1}(2n-2nx-x)}{2\sqrt{1-x}} = \frac{x^{n-1}(2n-(2n+1)x)}{2\sqrt{1-x}}$$

3) Quel que soit *n*, $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-x = +\infty$, $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-x} = +\infty$ par composition.

   Si *n* est pair, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ par produit.

   Si *n* est impair, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ par produit. **(2 points)**

4) $f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x^{n-1}(2n-(2n+1)x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $2n-(2n+1)x = 0$. On a donc $a_n = \dfrac{2n}{2n+1}$ qui est bien un élément de]0 ; 1[. **(1 point)**

5) Quel que soit *n*, $2n-(2n+1)x$ est positif sur]–∞ ; a_n] et négatif sur]a_n ; 1].

   Si *n* est impair, alors *n* – 1 est pair et x^{n-1} est toujours positif, et nul en 0 si *n* > 2. On a dans ce cas le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		a_n		1
f_n'		$+$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$
f_n	$-\infty$	↗	0	↗	$f_n(a_n)$	↘	0

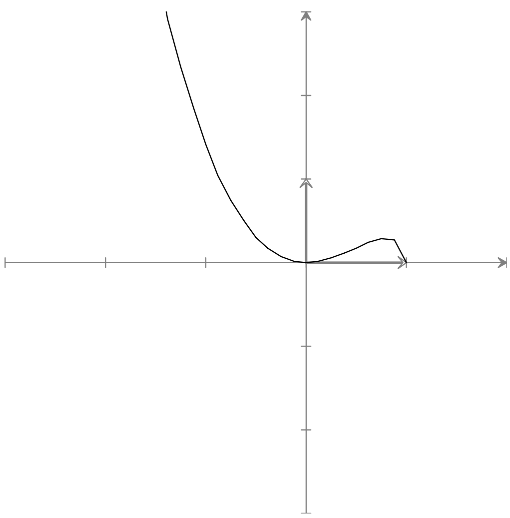
Si *n* est pair, alors $n - 1$ est impair est x^{n-1} est négatif sur $]-\infty ; 0]$ et positif sur $[0 ; 1]$. On a alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		a_n		1
f_n'		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$
f_n	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f_n(a_n)$	$\searrow$	0

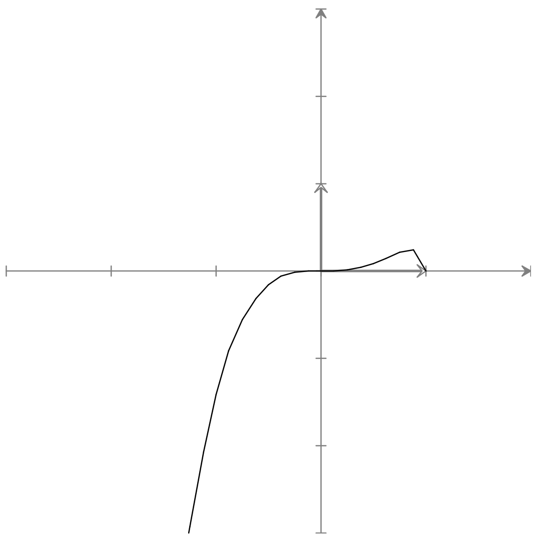
Dans tous les cas, $f_n(a_n) = \left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^n \sqrt{1-\dfrac{2n}{2n+1}} = \left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^n \sqrt{\dfrac{1}{2n+1}}$ **(2,5 points)**

6) Pour tout x, $f_{n+2}(x) - f_n(x) = x^{n+2}\sqrt{1-x} - x^n\sqrt{1-x} = x^n(x^2-1)\sqrt{1-x}$.
Pour tout n, $x^2 - 1$ est positif sur $]-\infty ; -1]$ et négatif sur $[-1 ; 1]$, et $\sqrt{1-x}$ est positif.
Comme ci-dessus, tout dépend de la parité de n :
Si n est pair, alors x^n est toujours positif, et C_{n+2} est en dessus de C_n sur $]-\infty ; -1]$ et en dessous sur $[-1 ; 1]$. Leurs points d'intersection sont les points d'abscisses -1, 0 et 1.
Si n est impair, alors x^n est négatif sur $]-\infty ; 0]$ et positif sur $[0 ; 1]$. C_{n+2} est donc au dessus de C_n sur $[-1 ; 0]$, et en dessous sur $]-\infty ; -1]$ et $[0 ; 1]$. Leurs points d'intersection sont les points d'abscisses -1, 0 et 1. **(1,5 point)**

7) (1,5 point)



n pair



n impair

Exercice 2

1) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+x+2} + x$
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+x+2 = +\infty$, $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ par somme et composée. **(0,5 point)**
En $-\infty$, on a une indétermination $-\infty + \infty$, et comme nos infinis sont de même valeur, factoriser x ne ferait que changer en une indétermination $0\times\infty$. Il faut donc utiliser l'expression conjuguée :
$f(x) = \dfrac{(\sqrt{x^2+x+2}+x)(\sqrt{x^2+x+2}-x)}{\sqrt{x^2+x+2}-x} = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+x+2}-x}$. Il ne reste plus qu'à factoriser x en haut et en bas, sans oublier que x est ici négatif. Pour tout $x < 0$, on a :

$$f(x)=\frac{x(1+\frac{2}{x})}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2})}-x}=\frac{x(1+\frac{2}{x})}{-x(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-1)}=\frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-1}.$$ On peut enfin, par somme, quotient et composée, trouver que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{1}{2}$ **(1 point)**

Dérivée de *f* : par somme et composée, et $f\,'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}+1$. **(0,5 point)**

2) *g* est définie sur ℝ–{–2 ; 2} par $g(x)=\frac{x^3-2x^2-5x+6}{4-x^2}$. Développons :

$$-x+2-\frac{x+2}{4-x^2}=\frac{(-x+2)(4-x^2)-(x+2)}{4-x^2}=\frac{-4x+x^3+8-2x^2-x-2}{4-x^2}=g(x).$$ **(0,75 point)**

On peut remarquer que $4-x^2=(2-x)(2+x)$, donc $g(x)=-x+2-\frac{1}{2-x}$

Limites à l'infini : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2-x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ et de même $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ **(1 point)**

Limite en –2 : $\lim\limits_{x\to-2} -x+2-\frac{1}{2-x}=2+2-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$ **(0,5 point)**

Limites en 2 : $\lim\limits_{x\to2^-} 2-x=0^+$, donc $\lim\limits_{x\to2^-} g(x)=-\infty$ et de même $\lim\limits_{x\to2^+} g(x)=+\infty$ **(0,75 point)**

Exercice 3)

1) *f* est définie sur [1 ; +∞[par $f(x)=x(x-1)^2$, elle est dérivable et sa dérivée vaut pour tout x $f\,'(x)=(x-1)^2+x\times2(x-1)=(x-1)(x-1+2x)=(x-1)(3x-1)$. Il en résulte que *f'* est positive sur [1 ; +∞[et que *f* est strictement croissante sur cet intervalle. *f* est en outre continue sur [1 ; +∞[donc aussi sur [1 ; 2], *f*(1) = 0 et *f*(2) = 2. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, 1 appartient à [*f*(1) ; *f*(2)] donc l'équation *f*(*x*) = 1 admet une solution *a* unique sur [1 ; 2]. On trouve à la calculatrice 1,754 < *a* < 1,755 **(2 points)**

2) *g* est la fonction définie sur [1 ; +∞[par $g(x)=1+\frac{1}{\sqrt{x}}$. L'équation *g*(*x*) = *x* est donc équivalente à : $1+\frac{1}{\sqrt{x}}=x\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{x}}=x-1\Leftrightarrow 1=(x-1)\sqrt{x}\Leftrightarrow 1=x(x-1)^2$ car les nombres *x* et *x* – 1 sont positifs sur [1 ; +∞[. Les équations *g*(*x*) = *x* et *f*(*x*) = 1 étant équivalentes, elles ont le même ensemble de solutions. **(1 point)**