

Devoir de mathématiques

N°8

D'après bac S, 1996

L'objectif est de déterminer les droites tangentes à la fois à la courbe représentative de la fonction logarithme népérien et à celle de la fonction exponentielle. Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 1 cm.

On note :

Γ et \mathcal{C} les courbes d'équations respectives $y = e^x$ et $y = \ln x$;

T_a la tangente à la courbe Γ en son point A d'abscisse a , a étant un nombre réel.

D_λ la tangente à \mathcal{C} en son point K d'abscisse λ , λ étant un nombre réel strictement positif.

Les deux parties sont, dans une large mesure, indépendantes.

Partie A (6 points)

Dans cette partie on recherche des tangentes aux courbes \mathcal{C} et Γ qui sont parallèles ; puis à quelle condition une droite tangente à Γ est également tangente à \mathcal{C} .

1) a) Déterminer une équation cartésienne de la droite T_a . Déterminer de même une équation cartésienne de la droite D_λ .

b) Déterminer λ en fonction de a pour que les droites T_a et D_λ soient parallèles.

On notera b la valeur de λ ainsi obtenue, B le point de la courbe \mathcal{C} d'abscisse b et D_b la tangente correspondante.

2) Montrer que les droites T_a et D_b sont confondues si et seulement si :

$$b = e^{-a} \text{ et } (a+1)e^{-a} = a-1$$

Partie B (14 points)

Dans cette partie, on se propose de déterminer les solutions de l'équation : $e^{-x} = \frac{x-1}{x+1}$ (1).

Pour cela, on considère la fonction f définie pour tout x différent de -1 par $f(x) = \frac{x-1}{x+1} e^x$.

1) a) Montrer que $f(x) = 1$ si et seulement si $e^{-x} = \frac{x-1}{x+1}$.

b) Etudier les variations de f sur $[0 ; +\infty[$ et la limite de f en $+\infty$.

c) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet dans $[0 ; +\infty[$ une solution unique μ dont on donnera un encadrement à 10^{-1} près.

2) a) Pour tout nombre réel x différent de 1 et -1 , calculer le produit $f(x) \times f(-x)$.

b) Dédire des questions précédentes que l'équation (1) admet deux solutions opposées.

c) Déterminer les tangentes communes aux courbes \mathcal{C} et Γ .

3) Tracer dans le repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) les courbes \mathcal{C} et Γ . On rappelle que ces courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. Tracer également les tangentes communes T_μ et $T_{-\mu}$. On prendra pour μ la valeur approchée 1,55.

4) On appelle A le point de contact de T_μ et Γ , B le point de contact de T_μ et \mathcal{C} , C le point de contact de

$T_{-\mu}$ et Γ , D le point de contact de $T_{-\mu}$ et \mathcal{C} . Montrer que ces points ont pour coordonnées $A\left(\mu, \frac{\mu+1}{\mu-1}\right)$,

$B\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}, -\mu\right)$, $C\left(-\mu, \frac{\mu-1}{\mu+1}\right)$, $D\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}, \mu\right)$. Démontrer que $ABCD$ est un trapèze isocèle.