Corrigé du sujet France 1996

Remarques d'ordre général et de la plus haute importance :

Il y avait dans ce problème beaucoup de lettres. Chacune de ces lettres représentait un réel, mais les statuts de ces réels étaient extrêmement différents. A savoir :
Dans la première partie, a et λ représentent des **variables indépendantes** ($a \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$) tandis que b dépend de a (en fait, b est le **nom de la solution** d'une équation d'**inconnue** λ et de **paramètre** a).
Dans la deuxième partie, f est une fonction définie par $f(x) = \frac{x-1}{x+1}e^x$. x est en général une **variable** qui appartient à $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. μ est le **nom donné à la solution** positive de l'équation d'**inconnue** x : $f(x) = 1$.
Ainsi on n'a pas $e^{-x} = \frac{x-1}{x+1}$ (c'est une équation), mais $e^{-\mu} = \frac{\mu-1}{\mu+1}$ (μ est solution de cette équation).
On en conclut que a, λ et x pourront prendre toutes les valeurs possibles, que b est connu en fonction de a, et que μ a une valeur fixée ad vitam aeternam (et $\mu \simeq 1{,}55$).
Concernant les équations de droites :
Même s'il y a 100000000000 droites, chacune aura une équation réduite de la forme $y = px + q$, où p et q sont deux réels **fixes** (qui dépendent de la droite), tandis que x et y représentent les coordonnées d'un point quelconque du plan (ce sont donc des **variables**), qui est sur la droite si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation. Il n'est pas nécessaire de changer le nom de x et y quand on change de droite.
Concernant les équivalences et autres machins :
Quand vous rédigez « *Pour que* machin *il faut que* bidule » ou bien « Chose *si* trucmuche » vous ne faites pas des équivalences. Il faut écrire « ***Pour que*** machin ***il faut et il suffit que*** bidule » ou bien « Chose ***si et seulement si*** trucmuche ».
Dans la deuxième partie, on vous demande de prouver que deux équations sont équivalentes. Certains ont commencé en écrivant « Si … ». Cette rédaction permet de prouver que la deuxième équation est une *conséquence* de la première, mais pas qu'elles sont *équivalentes*.
Le pire, c'est quand on vous demande de démontrer une propriété et que vous commencez votre rédaction par « *Si cette propriété…* ». Dans la mesure où vous faites de la propriété une **hypothèse**, elle ne peut plus être une **conclusion** (on peut à la rigueur démontrer que la propriété considérée est fausse, ça s'appelle un raisonnement par l'absurde). Dans ce cas, la note que vous aurez à la question sera 0
Dans une suite de calculs :
a) On calcule une expression (par exemple une dérivée) : = va bien. On présente

$$f'(x)=\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}e^x+\frac{x-1}{x+1}e^x$$
$$=\frac{2}{(x+1)^2}e^x+\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2}e^x$$
$$=\frac{(2+x^2-1)e^x}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^2}$$

b) On résout une équation : il faut $\Leftrightarrow$. Par exemple

$$f(x)=1\Leftrightarrow\frac{x-1}{x+1}e^x=1$$
$$\Leftrightarrow\frac{x-1}{x+1}=\frac{1}{e^x}$$
$$\Leftrightarrow\frac{x-1}{x+1}=e^{-x}$$

c) On recherche un encadrement (pas dans ce problème) : si…alors est parfait. Par exemple e^x est toujours positif donc pour tout réel x, $e^x+1>1$ et $0<\frac{1}{e^x+1}<1$ car la fonction inverse est décroissante de]0 ; +∞ [vers]0 ; +∞ [.

Dans tous les cas, quand on écrit une suite de calculs, il est primordial d'indiquer les liens logiques entre ces calculs (équivalences, donc, et ainsi de suite).

<u>Concernant le théorème des valeurs intermédiaires</u> :

Hypothèses à vérifier : f est continue et strictement monotone sur un intervalle [a ; b].

Phrase à dire : f est donc une bijection de [a ; b] vers [$f(a)$; $f(b)$] (ou [$f(b)$; $f(a)$] si f décroît).

Il faut ensuite calculer f(a) et $f(b)$, en donner éventuellement une valeur approchée, vérifier que le nombre recherché (dans le problème c'était 1) appartient bien à l'intervalle [$f(a)$; $f(b)$]

On peut enfin conclure : 1 admet un unique antécédent dans [a ; b]

Remarque : la fonction f n'admet rien. 1 admet un antécédent. L'équation $f(x)$ = 1 admet une solution.

Correction proprement dite (Je ne vais pas tout traiter, mais m'attacher aux questions qui ont posé problème)

Partie A]

L'équation réduite de T_a est $y = e^a x - ae^a + e^a$.

L'équation réduite de D_λ est $y = \frac{1}{\lambda}x - 1 + \ln(\lambda)$

T_a et D_λ sont parallèles si et seulement si elles ont même coefficient directeur, c'est à dire si et seulement si $e^a = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = e^{-a}$. On note $b = e^{-a}$.

D_b a pour équation $y = \frac{1}{b}x - 1 + \ln(b)$ compte tenu de $b = e^{-a}$

$\Leftrightarrow y = e^a x - 1 - a$

T_a et D_b sont confondues si et seulement si elles sont parallèles avec la même ordonnée à l'origine, c'est à dire si et seulement si $b = e^{-a}$ et $e^a - ae^a = -1 - a \Leftrightarrow e^a(1-a) = -1 - a \Leftrightarrow (a-1) = (a+1)e^{-a}$

Partie B]

1) a) a déjà été traité dans les généralités.

1) b) f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par produit et quotient, et $f'(x) = \frac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^2}$. x^2+1, $(x+1)^2$ et e^x étant toujours positifs, f 'est strictement positive sur $[0 ; +\infty[$ et f est strictement croissante sur cet intervalle.

Etude de la limite de f en $+\infty$: pour tout $x \neq 0$, $\frac{x-1}{x+1} = \frac{x(1-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{1}{x})} = \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

1) c) C'est le théorème des valeurs intermédiaires (confer supra)

f est continue et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ donc aussi sur $[1 ; 2]$ (1 et 2 sont des valeurs arbitraires pour obtenir un intervalle fermé) donc f est une bijection de $[1 ; 2]$ vers $[f(1) ; f(2)]$. $f(1) = 0$ et $f(2) = \frac{1}{3}e^2$. Comme $e > 2$, $e^2 > 4$ et $f(2) > 1$. Ainsi $1 \in [f(1) ; f(2)]$, donc l'équation $f(x) = 1$ a une unique solution μ sur $[1 ; 2]$. Comme f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, l'équation $f(x) = 1$ a une unique solution sur cet intervalle.

On calcule $f(1,5)$ et $f(1,6)$, on en donne une valeur approchée, et on conclut que $1,5<\mu<1,6$.

2) a) On calcule ce produit, et on trouve 1.

2) b) On sait que $f(\mu) = 1$. On en déduit que $f(-\mu)$ est aussi égal à 1. D'autre part, μ étant la seule solution positive de l'équation $f(x) = 1$, $-\mu$ en est la seule solution négative (car si un nombre est solution de cette équation, son opposé l'est aussi d'après 2) a). L'équation (1) étant équivalente à l'équation $f(x) = 1$ d'après 1) a), elle a pour uniques solutions μ et $-\mu$. Elle admet donc bien deux solutions opposées.

c) Les tangentes communes à $\mathscr{C}$ et Γ sont les tangentes à Γ en ses points d'abscisse a, où a vérifie $(a+1)e^{-a} = a - 1$, équation équivalente à (1). Il en résulte que les tangentes communes à $\mathscr{C}$ et Γ sont les droites T_μ et $T_{-\mu}$.

3) laissé au lecteur.

Partie C]

On obtient facilement que S(M')=M

Si M appartient à Γ, alors $y = e^x$ donc $\frac{1}{y} = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$ donc $y' = e^{x'}$ et M' appartient aussi à Γ.

2) Soit A le point d'abscisse μ de Γ. On sait que T_μ qui est par définition la tangente à Γ en A, est aussi tangente à $\mathscr{C}$ (d'après B] 2) c), au point B de $\mathscr{C}$ d'abscisse $e^{-\mu}$ (d'après A] 2).
A' a pour coordonnées (-μ ; $e^{-\mu}$), donc $T_{-\mu}$ est tangente à Γ en A' par définition. Cette droite est aussi tangente à $\mathscr{C}$ (d'après B]2)c)au point d'abscisse $e^{-(-\mu)} = e^{\mu}$ d'après A] 2).
On obtient ainsi $B_1(e^{\mu} ; \mu)$ et $B(e^{-\mu} ; -\mu)$

3) a) se fait en disant que μ et -μ sont solutions de l'équation $e^{-x} = \frac{x-1}{x+1} \Leftrightarrow e^{x} = \frac{x+1}{x-1}$.

b) La symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$ permute les coordonnées. Ainsi A et B_1 ainsi que A' et B, sont symétriques par rapport à cette droite. Il en résulte que les droites T_μ et $T_{-\mu}$ sont symétriques par rapport à cette droite. Le quadrilatère AB_1BA', ayant un axe de symétrie, est un trapèze iosocèle.

4) On va calculer l'aire $\mathscr{A}_1$ du trapèze formé par les points A et A' et leurs projetés sur l'axe des abscisses, ainsi que l'aire $\mathscr{A}_2$ du domaine plan délimitée par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \mu$ et $x = -\mu$. D'après l'énoncé, la droite (AA') étant au dessus de Γ, l'aire recherchée vaudra $\mathscr{A}_1$-$\mathscr{A}_2$.

Calcul de $\mathscr{A}_1$: la hauteur vaut 2μ, les bases respectivement e^{μ} et $e^{-\mu}$ donc $\mathscr{A}_1 = \mu(e^{\mu} + e^{-\mu})$.

Calcul de $\mathscr{A}_2$: La fonction exponentielle est positive donc $\mathscr{A}_2 = \int_{-\mu}^{\mu} e^x dx = e^{\mu} - e^{-\mu}$.

$\mu(e^{\mu} + e^{-\mu})$

L'aire recherchée vaut donc $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_2 = e^{\mu}(\mu - 1) + e^{-\mu}(\mu + 1)$.

Comme on sait que $e^{\mu} = \frac{\mu+1}{\mu-1}$ et que $e^{-\mu} = \frac{\mu-1}{\mu+1}$, on obtient bien que $\mathscr{A} = 2\mu$

Et voilà.