Classe de terminale S_4 ***Samedi 6 décembre 2003***

Devoir de mathématiques

N°8

Exercice 1 (d'après Bac S, Guadeloupe, Guyane, Martinique, Palmiers, 1997, 10 points)

On appelle *f* la fonction définie sur]0 ; +∞[par $f(x)=\ln(\frac{x+1}{x})-\frac{1}{x+1}$.

1) Déterminer la dérivée de *f*, étudier ses variations.
2) Calculer les limites de *f* en 0 et en +∞. Dresser le tableau de variation de *f*.
3) *g* est définie sur]0 ; +∞[par $g(x)=x\ln(\frac{x+1}{x})$. Déterminer la dérivée de *g* et étudier son signe à l'aide de la question précédente.
4) Vérifier que $g=h\circ k$, avec $h(x)=\frac{\ln(x+1)}{x}, k(x)=\frac{1}{x}$. En déduire les limites de *g* en 0 et en +∞, et dresser le tableau de variation de *g*

Exercice 2 (que j'ai fait tout seul, 10 points)

On appelle *f* la fonction définie pour *x* > 0 par $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ et *f*(0) = 0.

1) Calculer *f*(1) et *f*(2)
2) Montrer que l'on a pour tout *x* > 0 $f(x)=e^{\frac{\ln x}{x}}$. En déduire que *f* est continue en 0.
3) Montrer que *f* est dérivable sur]0 ; +∞[et que *f'*(*x*) est du signe de 1 – ln*x*. En déduire les variations de *f*. Etudier la limite de *f* en +∞ et dresser le tableau de variation de *f*.
4) Donner une équation de la tangente *T* à la courbe $\mathscr{C}$ de *f* en son point d'abscisse 1. Montrer que pour tout réel strictement positif *x* on a $\frac{\ln x}{x}\leq\ln x$. En déduire la position de $\mathscr{C}$ par rapport à *T* (on sera amené à remarquer que $x=e^{\ln x}$)
5) Montrer que $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$. Que peut-on en déduire pour *f* et $\mathscr{C}$?
6) Donner l'allure de $\mathscr{C}$ en faisant figurer tous les résultats précédents.