Classe de terminale S_4

Corrigé du Ds n°8

Exercice 1

f est définie sur]0 ; +∞[par $f(x)=\ln(\frac{x+1}{x})-\frac{1}{x+1}$.

1) Pour tout $x > 0$ $f(x)=\ln(x+1)-\ln(x)-\frac{1}{x+1}$

   donc $f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x(x+1)-(x+1)^2+x}{x(x+1)^2}=\frac{-1}{x(x+1)^2}$. f' est donc négative et *f* est strictement décroissante sur]0 ; +∞[**(2 points)**

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x+1}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\ln(\frac{x+1}{x})=+\infty$ par composition et $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$.

   Pour $x > 0$, $\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ par composition et somme.

X	0		$+\infty$
f'	‖	$-$	
f	$+\infty$	↘	0

(2,5 points)

3) *g* est définie par $g(x)=x\ln(\frac{x+1}{x})$ donc pour tout $x > 0$:

   $g'(x)=\ln(\frac{x+1}{x})+x(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x})=\ln(\frac{x+1}{x})+\frac{x}{x+1}-1$.

   Or, d'après la question précédente, que pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$, donc $\ln(\frac{x+1}{x})>\frac{1}{x+1}$. On peut donc écrire que pour tout $x > 0$, $g'(x)>\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x+1}-1$, c'est à dire $g'(x)>0$. **(2 points)**

4) $h(x)=\frac{\ln(x+1)}{x}, k(x)=\frac{1}{x}$ donc $h\circ k(x)=h[k(x)]=h(\frac{1}{x})=\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}=x\ln(\frac{x+1}{x})$. On a bien $g=h\circ k$. Déduisons-en les limites de *g* :

   $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$ (c'est la dérivée de ln en 1), donc $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1$

   $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$, et $\frac{\ln(1+t)}{t}=\frac{\ln(1+t)}{1+t}\times\frac{1+t}{t}=\frac{\ln(1+t)}{1+t}(1+\frac{1}{t})$. $\lim\limits_{t\to+\infty}1+\frac{1}{t}=1$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+t)}{1+t}=0$

   donc $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+t)}{t}=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$.

   Finalement :

x	0		$+\infty$
g'	‖	$+$	
g	0	↗	1

(3,5 points)

Exercice 2)

f est définie sur]0 ; +∞[par $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$.

1) $f(1)=1^1=1$, $f(2)=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$ **(0,5 point)**

2) D'après le cours, $a^b=e^{b\ln a}$ donc $x^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln x}=e^{\frac{\ln x}{x}}$. Comme $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{\ln x}{x}=-\infty$ par quotient, et $\lim\limits_{t\to-\infty}e^t=0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}e^{\frac{\ln x}{x}}=0$ par composition. *f* est donc continue en 0. **(1,5 point)**

3) *f* est dérivable sur]0 ; +∞[par quotient et composée, et pour tout $x>0$,

$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}e^{\frac{\ln x}{x}}=\frac{1-\ln x}{x^2}e^{\frac{\ln x}{x}}$. Une exponentielle est toujours positive donc *f'*(*x*) est du signe de $1-\ln x$. Eudions le :

$1-\ln x>0\Leftrightarrow \ln x<1\Leftrightarrow 0<x<e$ car ln est strictement croissante sur]0 ; +∞[. *f* est donc croissante sur [0 ; *e*] et décroissante sur [*e* ; +∞[.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ par théorème, $\lim\limits_{t\to 0}e^t=1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x}{x}}=1$ par composition.

On a donc

x	0		e		$+\infty$
f'		$+$		$-$	
f	0	↗	$e^{\frac{1}{e}}$	↘	1

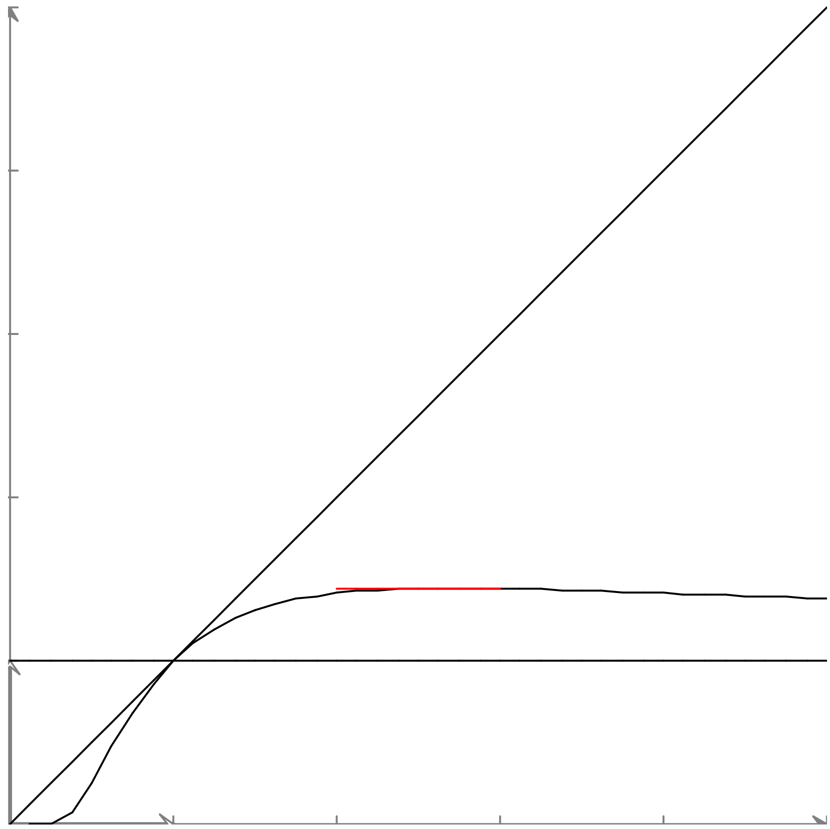
(3 points)

4) *f'*(1) = 1, *f*(1) = 1, donc *T* a pour équation $y=x$.

Pour tout *x* > 0, $\ln x-\frac{\ln x}{x}=(1-\frac{1}{x})\ln x=\frac{x-1}{x}\ln x$. Comme ln*x* > 0 si et seulement si *x* > 1, $(x-1)\ln x$ est positif pour tout *x*. On a donc pour tout *x* $\frac{\ln x}{x}\leq\ln x$, donc $e^{\frac{\ln x}{x}}\leq e^{\ln x}$ car l'exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$. On a donc pour tout *x* : *f*(*x*) ⩽ *x*, et $\mathscr{C}$ est en dessous de *T*. **(2,5 points)**

5) $\frac{f(x)}{x}=\frac{x^{\frac{1}{x}}}{x}=x^{\frac{1}{x}-1}=e^{(\frac{1}{x}-1)\ln x}$. Comme $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$, que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}-1=+\infty$, on trouve que $\lim\limits_{x\to 0}e^{(\frac{1}{x}-1)\ln x}=0$ par composition. On en déduit que *f* est dérivable en 0, et que *f'*(0) = 0. Il en résulte que l'axe des abscisses est tangent à $\mathscr{C}$ en *O*. **(1,5 point)**

6) 1 point



7)