Classe de Terminale S_6 ***Mercredi 21 Novembre 2000***

Devoir de mathématiques

n°7

Exercice 1) (12 points)

On appelle f la fonction définie sur]0 ; +∞[par $f(x) = (x+1)\ln x$ -1, et C sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité 2cm.

1) Etudier les limites de f en 0 et en +∞. En déduire l'existence d'une asymptote à C.
2) Calculer la dérivée f' de f, puis la dérivée f'' de f', montrer que $f''(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$. Etudier le signe de f'', calculer $f'(1)$ et en déduire que pour tout x, $f'(x) \geq 2$. Préciser le sens de variation de f.
3) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $f(x) + 1 \geq 2(x-1)$.
4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution a sur [1 ; 2]. Donner à la calculatrice un encadrement de a à 10^{-2} près.
5) Tracer C.
6) a) En remarquant que $\dfrac{(x+1)^2}{x} = x+2+\dfrac{1}{x}$, donner une primitive de $\dfrac{(x+1)^2}{x}$.

   b) En déduire à l'aide d'une intégration par parties le calcul de $\int_1^a f(x)dx$.

Exercice 2) (8 points)

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   a) $\ln(x-1) - 2\ln(x-3) = 0$.
   b) $\ln^2 x + \ln x - 2 = 0$
   c) $\ln(2x-1) < 2$
2) Résoudre dans $\mathbb{N}$ $\dfrac{1}{1000} \leq \dfrac{3}{4^n} \leq \dfrac{1}{100}$.
3) Calculer $\int_1^2 \left(\dfrac{1}{2x+1} - \dfrac{2}{x+1}\right)dx$.
4) a) En remarquant que $\dfrac{1}{x}$ est la dérivée de ln x, calculer $\int_1^e \dfrac{1}{x}(\ln x)^n\, dx$.

   b) Calculer de même $\int_e^{e^2} \dfrac{1}{x\ln x}\, dx$.