Classe de Terminale S_6 **Mercredi 27 Septembre 2000**

Devoir de mathématiques

N°2

Exercice 1) (6 points)

n désigne un entier supérieur à 1

1) Rappeler la valeur de $S_n = 1+2+3+...+n$. Exprimer S_n à l'aide du symbole Σ.
2) On appelle S_n' la somme $S_n' = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + ... + n(n+1)$.
   a) Exprimer S_n' à l'aide du symbole Σ.
   b) Montrer par récurrence que pour tout n on a $S_n' = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
   c) On admettra que $S_n' = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k^2$. Déduire des résultats précédents la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k^2$ en fonction de n.
3) Montrer par récurrence que $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$
4) On cherche à généraliser les résultats précédents : p désigne un entier supérieur à 1, et on définit la somme : $S(n,p) = 1\times 2\times ...\times p + 2\times 3\times ...\times (p+1) + 3\times 4\times ...(p+2) + ... + n(n+1)....(n+p-1)$. Montrer par récurrence **sur *n*** (p est supposé fixé) que $S(n,p) = \dfrac{n(n+1)(n+2)...(n+p)}{p+1}$.

Exercice 2) (d'après Bac STI, 1989, 7 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 1 cm.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4z + 16 = 0$. On notera z_0 et z_1 les solutions, z_0 étant celle dont la partie imaginaire est positive. Placer dans le plan complexe les points A et B d'affixes respectives z_0 et z_1.
2) On considère les deux nombres complexes définies par $z_2 = -4$ et $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$. Calculer le module et un argument de chacun de ces nombres complexes. Placer dans le plan complexe les points C et D d'affixes respectives z_2 et z_3 sur le même repère qu'au 1
3) a) Démontrer que les points A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O.
   b) Calculer $\dfrac{z_0 + z_2}{2}$. Que peut-on en déduire pour les points A, C, D ?
   c) Calculer $\dfrac{z_0 - z_3}{z_1 - z_3}$. Que peut-on en déduire pour le triangle ABD ?
   d) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 3) (d'après Bac S, Nouvelle Calédonie, 1996, 7 points)

A tout complexe z différent de $3-i$ on associe le complexe $f(z) = \dfrac{2iz - 4 + 2i}{z - 3 + i}$

1) Calculer $f(1+i)$.
2) Déterminer le complexe z tel que $f(z) = 1+i$
3) On appelle x et y la partie réelle et la partie imaginaire de z. déterminer en fonction de x et y la partie réelle X et la partie imaginaire Y de $f(z)$.
4) Dans le plan complexe, on appelle A le point d'affixe $-1-2i$, B le point d'affixe $3-i$ et M le point d'affixe z. Montrer que $|f(z)| = \dfrac{2MA}{MB}$. Donner une interprétation de $\arg(f(z))$ à l'aide de l'angle $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})$