Classe de Terminale S_5

Corrigé du devoir n°6

Exercice 1)

f est définie par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

Etude de la continuité de f : sur $\mathbb{R} - \{0\}$, f est continue comme différence et quotient de fonctions continues. En 0, il faut étudier $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$. Or cette forme est par définition la dérivée de l'exponentielle en 0, elle vaut donc $e^0 = 1 = f(0)$. On en conclut que *f* est continue en 0, et donc *f* est continue sur $\mathbb{R}$.

Etude des limites de *f* en $-\infty$ et $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x - 1 = -1$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x - 1}{x} = 0$ par quotient .

$f(x) = \dfrac{e^x}{x} - \dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ (croissances comparées), $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Etude des variations de *f*

f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par quotient, et $f'(x) = \dfrac{e^x x - (e^x - 1)}{x^2} = \dfrac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$; Posons donc $g(x) = xe^x - e^x + 1$, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = xe^x + e^x - e^x = xe^x$. $g'(x)$ est du signe de x car une exponentielle est toujours positive.

On a donc le tableau suivant

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

g est donc toujours positive puisque son minimum est 0. Comme *f'* est du signe de *g*, *f* est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

Les fonctions *u* et *v* :

On a $u(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}$ donc $u'(x) = e^x - 1 - x$ et $u''(x) = e^x - 1$. De même :

$v(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2} - x^3$ donc $v'(x) = e^x - 1 - x - 3x^2$, $v''(x) = e^x - 1 - 6x$ et $v^{(3)}(x) = e^x - 6$

$e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$ car l'exponentielle est croissante. On a donc pour *u* les tableaux :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u''(x)$		$-$	0	$+$	
$u'(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	
$u'(x)$		$+$	0	$+$	
$u(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

Par la suite, $u(x) \geq 0$ si $x \geq 0$ et $u(x) \leq 0$ si $x \leq 0$. On peut donc en conclure, comme $u(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}$, que $e^x - 1 - x \geq \dfrac{x^2}{2}$ si $x \geq 0$ et $e^x - 1 - x \leq \dfrac{x^2}{2}$ si $x \leq 0$.
Pour v, c'est la même chose sauf que c'est le contraire :
$e^x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq \ln 6$ car l'exponentielle est croissante. On a donc les tableaux :

x	$-\infty$		0		ln6
$v^{(3)}(x)$		$-$	0	$-$	
$v''(x)$		↘	0	↘	
$v''(x)$		$+$	0	$-$	
$v'(x)$		↗	0	↘	
$v'(x)$		$-$	0	$-$	
$v(x)$		↘	0	↘	

Par la suite, $v(x) \leq 0$ si $x \geq 0$ et $v(x) \geq 0$ si $x \leq 0$. On peut donc en conclure, comme $v(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2} - x^3$, que $e^x - 1 - x \leq \dfrac{x^2}{2} + x^3$ si $x \geq 0$ et $e^x - 1 - x \geq \dfrac{x^2}{2} + x^3$ si $x \leq 0$.
On a donc, pour $x > 0$, $\dfrac{x^2}{2} \leq e^x - 1 - x \leq \dfrac{x^2}{2} + x^3$ donc $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} \leq \dfrac{1}{2} + x$, et pour $x < 0$, $\dfrac{x^2}{2} + x^3 \leq e^x - 1 - x \leq \dfrac{x^2}{2}$ donc $\dfrac{1}{2} + x \leq \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} \leq \dfrac{1}{2}$. Dans tous les cas, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.
Etude de la dérivabilité de f en 0 : on revient à la définition
$\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{\dfrac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$. On vient de prouver que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$, donc f est dérivable en 0, et $f'(0) = \dfrac{1}{2}$;

Exercice 2
On définit f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 - 2x)e^{2x}$
Etude des limites de f :
$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty$ par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - 2x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ par produit

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$ par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - 2x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ par théorème sur les croissances comparées : l'exponentielle l'emporte en $-\infty$ sur les polynômes.
Etude des variations de f :
$f'(x) = 2(1 - 2x)e^{2x} - 2e^{2x} = -4xe^{2x}$ est du signe contraire de x car l'exponentielle est toujours positive. f' est donc positive sur $]-\infty\,;\,0]$ et négative sur $[0 : +\infty[$, f est donc strictement croissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et strictement décroissante sur $[0 : +\infty[$. On a le tableau

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

On appelle $f^{(1)}, f^{(2)} \dots f^{(n)}$ les dérivées successives de *f*.

$f^{(1)}(x) = -4xe^{2x}$

$f^{(2)}(x) = -4e^{2x} + 2(-4xe^{2x}) = -4(1+2x)e^{2x}$

$f^{(3)}(x) = -8e^{2x} - 2\times 4(1+2x)e^{2x} = -16(1+x)e^{2x}$.

Prouvons par récurrence sur n que $f^{(n)}(x) = 2^n(1-n-2x)e^{2x}$.

Initialisation pour $n = 1$

$f^{(1)}(x) = -4xe^{2x}$ et $2^1(1-1-2x)e^{2x} = -4xe^{2x}$, la proposition est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : supposons la propriété $f^{(n)}(x) = 2^n(1-n-2x)e^{2x}$ vraie pour un certain entier $n \geqslant 1$, et essayons de la prouver pour $n + 1$, soit $f^{(n+1)}(x) = 2^{n+1}(1-(n+1)-2x)e^{2x} = 2^{n+1}(-n-2x)e^{2x}$

On sait que $f^{(n+1)}$ est la dérivée de $f^{(n)}$, donc, par hypothèse de récurrence :

$$f^{(n+1)}(x) = 2^n(-2)e^{2x} + 2\times 2^n(1-n-2x)e^{2x} = 2^n e^{2x}(-2+2-2n-4x) = 2^n e^{2x}(-2n-4x)$$
$$= 2^{n+1}e^{2x}(-n-2x)$$

ce qu'il fallait démontrer. La propriété, vraie pour $n = 1$ et héréditaire, est vraie pour tout entier supérieur ou égal à 1.

La courbe de $f^{(n)}$ admet une tangente horizontale en un point où la dérivée de $f^{(n)}$, c'est à dire $f^{(n+1)}$, s'annule. Or $f^{(n+1)}(x) = 0 \Leftrightarrow 2^{n+1}(-n-2x)e^{2x} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{n}{2}$. L'abscisse x_n de M_n est donc égale à $x_n = -\frac{n}{2}$. Son ordonnée est bien sûr égale à $y_n = f^{(n)}(x_n)$, c'est à dire $y_n = 2^n(1-n-2\times\frac{-n}{2})e^{2\times\frac{-n}{2}} = 2^n e^{-n}$.

On a $x_{n+1} - x_n = \frac{-(n+1)}{2} - \frac{-n}{2} = -\frac{1}{2}$, la suite (x_n) est donc arithmétique de premier terme $x_1 = -\frac{1}{2}$, de raison $-\frac{1}{2}$. Sa raison étant strictement négative, sa limite est $-\infty$.

On a $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{2^{n+1}e^{-(n+1)}}{2^n e^{-n}} = 2e^{-1}$, la suite (y_n) est donc géométrique de premier terme $y_1 = 2e^{-1}$, de raison $2e^{-1}$. Sa raison étant comprise entre 0 et 1, sa limite est 0.

Et voila