Classes de terminale $S_5\,S_6$ ***Vendredi 6 Avril 2001***

Devoir de spécialité mathématiques

N°8

Exercice 1 (Bac S, centres étrangers, 1998, 13 points)

Partie A : Où l'on construit un triangle équilatéral.

D et Δ sont deux droites parallèles, et A est un point situé entre ces deux droites, n'appartenant à aucune d'entre elles. On fera une figure avec D en dessous de Δ. On veut construire un triangle équilatéral ABC où B appartient à D et C à Δ. Dans toute la suite on note r la rotation de centre A et d'angle $+\frac{\pi}{3}$.

1) On considère la droite D' image de D par r. Montrer que D' coupe Δ. On note C leur point d'intersection. Soit $B = r^{-1}(C)$. Montrer que le triangle ABC répond au problème.
2) Construire la droite D' et placer les points B et C.
3) Y a-t-il une autre solution à ce problème.

Partie B : Où on calcule l'aire de ce triangle équilatéral.

Soit O le projeté orthogonal de A sur D. Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D et $\vec{v}$ est choisi de telle sorte que le point A ait pour affixe ai avec a positif. On note α la distance de A à la droite Δ. On appelle B un point de D d'affixe z_B (z_B est réel). On appelle z_C l'affixe du point C image de B par r.

1) Montrer que $z_C = \frac{1}{2}(z_B + a\sqrt{3}) + \frac{i}{2}(a + z_B\sqrt{3})$.
2) En déduire que C appartient à Δ si et seulement si $z_B = \frac{1}{\sqrt{3}}(a + 2\alpha)$. Par la suite on prendra cette valeur pour z_B.
3) Exprimer AB^2 en fonction de a et α. En déduire que l'aire du triangle équilatéral ABC est $S = \frac{\sqrt{3}}{3}(a^2 + a\alpha + \alpha^2)$.

Exercice 2) (Grenoble, bac C, 1985, 7 points)

Soit C le cercle de centre O et de rayon R ($R > 0$) et $[AB]$ un diamètre de C.

1) Pour tout point M de C distinct de A et B on construit le point Q tel que $MABQ$ soit un parallélogramme. Déterminer l'ensemble décrit par le milieu I du segment $[MQ]$ puis l'ensemble décrit par le centre de gravité G du triangle BQM lorsque M décrit le cercle C privé des points A et B.
2) On note N le symétrique de A par rapport à M et P le point d'intersection des droites (ON) et (BM). Quel rôle joue P relativement au triangle ANB ?

Trouver une homothétie de centre B transformant M en P et déterminer l'ensemble Γ décrit par P quand M décrit le cercle C privé des points A et B.