Lycée Richelieu

Bac blanc 2002

Terminales STI

Epreuve de mathématiques

Durée : 4 heures.
La calculatrice est autorisée.
Un formulaire est joint au sujet

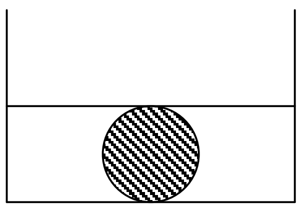
Exercice 1 (4 points)

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2 - 4z + 8 = 0$. On notera z_1 et z_2 les solutions de cette équation, z_1 ayant sa partie imaginaire positive.
2) Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2.
3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1cm, on considère les points *A*, *B*, *C*, *D* d'affixes respectives :
   $z_A = 2 + 2i$, $z_B = 2 - 2i$, $z_C = 2 + 2\sqrt{3}$, $z_D = 2 + 2\sqrt{3} + 4i$.
   a) Placer dans le plan complexe les 4 points *A*, *B*, *C*, *D*.
   b) Calculer les longueurs *AB*, *AC* et *BC*. Quelle est la nature du triangle *ABC* ?
   c) Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.
   d) Quelle est la nature du quadrilatère *ABCD* ?

Exercice 2) (5 points)

On désire calculer le rayon *R* d'une bille d'acier en la déposant au fond d'un récipient cylindrique de 10 cm de rayon et en y versant le volume *V* d'huile jusqu'au recouvrement de la bille ; la surface libre de l'huile affleure alors le sommet de la bille (voir la figure ci-après). La hauteur du récipient est supérieure à 20 cm.

1) Donner les limites de variation de *R*.
2) Exprimer le volume *V* en fonction de *R*
   (On rappelle que le volume d'une sphère de rayon *R* est $\frac{4}{3}\pi R^3$)
3) Etudier les variations de la fonction *f* définie sur [0 ; 10] par $f(x) = 600x - 4x^3$.
4) Montrer que pour certaines valeurs de *V*, comprises entre deux nombres que l'on calculera, il existe deux billes de rayons différents correspondant au même volume *V*.
5) A la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 0,01 des deux rayons correspondant au volume $V = 2400\ \text{cm}^3$



Problème (11 points)

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $g(x)=x^2+6-4\ln x$. On admet que le tableau de variation de g est le suivant :

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

1) Calculer $g(\sqrt{2})$.
2) En déduire que g est une fonction positive sur $]0\ ;+\infty[$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x}{4}-\dfrac{1}{2x}+\dfrac{\ln x}{x}$. On note f' la fonction dérivée de f et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 4cm.

1) a) Etudier la limite de f en $+\infty$.
   b) Etudier la limite de f en 0 et en déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
   c) Montrer que pour tout réel x de $]0\ ;+\infty[$ on a $f'(x)=\dfrac{g(x)}{4x^2}$.
   d) Déduire de la partie A le signe de $f'(x)$ puis le sens de variation de f sur $]0\ ;+\infty[$.
   e) Faire le tableau de variation de f sur $]0\ ;+\infty[$.
2) Soit D la droite d'équation $y=\dfrac{x}{4}$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
   a) Montrer que la droite D est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
   b) Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}$ et D.
   c) Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à D sur $]0\ ;\infty[$.
3) En utilisant les résultats précédents, tracer avec soin dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe $\mathscr{C}$ et la droite D.
4) On considère la fonction h définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $h(x)=-\dfrac{1}{2x}+\dfrac{\ln x}{x}$.
   a) En remarquant que $\dfrac{\ln x}{x}$ est de la forme $u'(x).u(x)$, déterminer une primitive H de h.
   b) Calculer $\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{e} h(x)dx$ (on rappelle que ce nombre est égal à $H(e)-H(\sqrt{e})$)