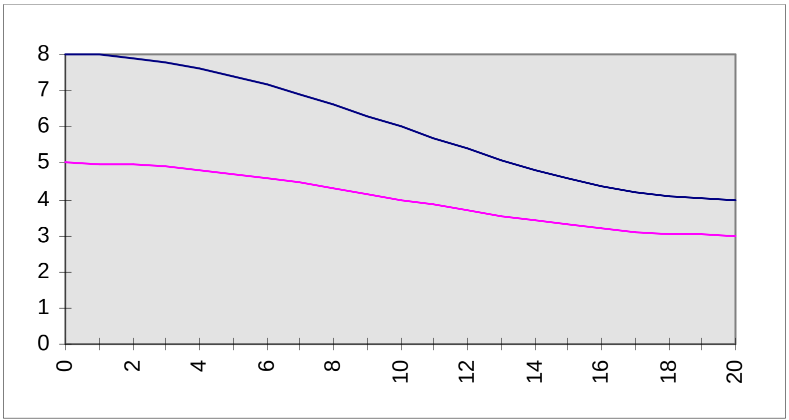
Classe de terminale STI$_3$ **Lundi 31 mars 2003**

Devoir de mathématiques

N°7

Exercice 1) (10 points)

On veut calculer le volume d'une tuyère, engendrée par la rotation de la partie comprise entre les deux courbes ci-dessous autour de l'axe des abscisses.



1) Donner la solution générale de l'équation différentielle : $400y''+\pi^2 y = 0$. Déterminer la solution *f* de cette équation qui vérifie *f*(0) = 2 et *f'*(0) = 0, la solution *g* qui vérifie *g*(0) = 1 et *g*(10) = 0. La courbe du haut est la représentation de *f*(*x*) + 6, le courbe du bas celle de *g*(*x*) + 4.
2) Montrer que $\left(2\cos\left(\frac{\pi x}{20}\right)+6\right)^2 - \left(\cos\left(\frac{\pi x}{20}\right)+4\right)^2 = \frac{3}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{10}\right)+16\cos\left(\frac{\pi x}{20}\right)+\frac{43}{2}$

   (on rappelle que $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$)
3) On rappelle que le volume engendré par la rotation de la courbe d'une fonction *h* autour de l'axe des abscisses entre les abscisses *a* et *b* vaut $v = \pi\int_a^b h^2(x)dx$.
   a) Calculer $\int_0^{20}\left(2\cos\left(\frac{\pi x}{20}\right)+6\right)^2 - \left(\cos\left(\frac{\pi x}{20}\right)+4\right)^2 dx$.
   b) En déduire le volume de la tuyère (l'unité de longueur est 0,1m)

Exercice 2 (10 points)

On considère l'équation différentielle (E): $y'+2y = 6e^x$.

1) Chercher une solution *g* de (E) de la forme $g(x) = ae^x$, *a* étant un réel .
2) Donner les solutions de (E') : $y'+2y = 0$.
3) Montrer que les fonctions *f* de la forme $f(x) = ke^{-2x}+2e^x$ sont solution de (E). Déterminer *k* pour qu'on ait *f*(0) = 10.
4) Etudier les variations de la fonction *h* définie par $h(x) = 8e^{-2x}+2e^x$.
5) Calculer $\int_0^{\ln 2} h(x)dx$