

Devoir de mathématiques

N°6

Exercice 1) (3 points)

- 1) On rappelle que pour tout réel x $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$. En déduire le calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$.
- 2) Calculer $\int_1^2 (2x - 1 + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2}) dx$
- 3) Calculer en fonction de n $\int_0^1 (2x+1)^n dx$

Exercice 2) (bac F₂ F₃, 1993, 17 points)

Partie A

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (x-1)e^x + 1$.

- 1) Calculer la dérivée g' de g et déterminer son signe en fonction des valeurs de x .
- 2) Dresser le tableau de variation de g sans étudier de limites.
- 3) Déduire de la question précédente le signe de $g(x)$ sur \mathbb{R} .

Partie B

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x-2)e^x + x$.

- 1) Etudier la limite de f quand x tend vers $+\infty$.
- 2) Etudier la limite de f quand x tend vers $-\infty$ (on pourra écrire $f(x) = xe^x - 2e^x + x$).
- 3) Calculer la dérivée f' de f , étudier son signe à l'aide de la partie A, dresser le tableau de variation de f .
- 4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique a sur \mathbb{R} , donner une valeur approchée de a à 10^{-2} près.
- 5) On appelle \mathcal{C} la courbe de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'unité 2cm. Montrer que \mathcal{C} admet la droite Δ d'équation $y = x$ comme asymptote. Etudier la position de \mathcal{C} par rapport à Δ , préciser les coordonnées de leur point d'intersection A .
- 6) Montrer qu'il existe un point E de \mathcal{C} où la tangente T à \mathcal{C} est parallèle à Δ . Calculer les coordonnées de E et donner une équation de T .
- 7) Construire Δ , T et \mathcal{C} . On précisera également la tangente au point de \mathcal{C} d'abscisse 0.
- 8) Montrer que la fonction F définie par $F(x) = (x-3)e^x + \frac{x^2}{2}$ est une primitive de f . En

déduire le calcul de $\int_0^1 f(x) dx$