Classe de terminale STI$_3$ ***Jeudi 1er Février 2001***

Devoir de mathématiques

N°8

Exercice 1) (Bac F$_2$ –F$_3$, 1992 : 6 points)

On considère les nombres complexes $a = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5$, $c = \frac{6}{3+i\sqrt{3}}$.

1) Mettre *a*, *b* et *c* sous forme exponentielle, puis mettre *b* et *c* sous forme algébrique.
2) Placer soigneusement dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 4 cm les points *A*, *B*, *C* d'affixes respectives *a*, *b*, *c*.
3) Soit *I* le point d'affixe 1.
   a) Montrer que les points *A*, *B*, *C* sont sur un cercle de centre *I* dont on précisera le rayon.
   b) Montrer que le triangle *OAC* est équilatéral.

Exercice 2) (Bac STI, Polynésie 1998 : 7 points)

Pour tout complexe *z*, on note $P(z) = z^4 - 12z^3 + 64z^2 - 104z + 84$.

1) a) Déterminer les réels *a* et *b* tels que l'on ait $P(z) = (z^2 - 2z + 2)(z^2 + az + b)$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation *P*(*z*) = 0.
2) On considère les nombres complexes 1 + *i*, 1 – *i*, $5 - i\sqrt{17}$, $5 + i\sqrt{17}$ et on désigne par *A*, *B*, *C*, *D* leurs images dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 1cm.
   a) Placer les points *A*, *B*, *C*, *D*.
   b) Démontrer que le triangle *ADC* est rectangle.
   c) Prouver que le point *B* appartient au cercle circonscrit au triangle *ADC*.
   d) Démontrer que le quadrilatère *ABCD* est un trapèze isocèle.

Exercice 3) (Bac STL, national,1996 : 8 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2 cm. On considère le point *A* d'affixe $z_A = 1$ et le point *B* d'affixe $z_B = x + iy$, *x* et *y* réels, *B* n'appartenant pas à (*OA*).

Soit *A*' l'image de *A* par la rotation de centre *O* et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et *B*' l'image de *B* par la rotation de centre *O* et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. On désigne par *I* le milieu du segment [*AB*]. Le but de l'exercice est de montrer que la médiane (*OI*) du triangle *OAB* est aussi hauteur du triangle *OA*'*B*'.

1) Dans cette question et uniquement dans celle-ci on prend $z_B = 3e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
   a) Mettre z_B sous forme algébrique.
   b) Placer les points *A*, *B*, *A*', *B*' et *I* dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
2) On revient au cas général en prenant $z_B = x + iy$.
   a) Donner en fonction de *x* et *y* les coordonnées du milieu *I* du segment [*AB*]
   b) Déterminer les affixes des points *A*' et *B*'.
   c) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont orthogonaux et conclure.
   d) Prouver en outre que *A*'*B*'= 2*OI*.