Lycée Richelieu

Bac blanc 1996/97

Terminales STI

Epreuve de mathématiques

Durée: 4 heures

Calculatrice autorisée

Exercice 1) (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité 1 cm; on désigne par i le complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1) Résoudre dans **C** l'équation $z^2 - 4z + 16 = 0$
On notera z_0 et z_1 les deux solutions, z_0 étant celle dont la partie imaginaire est positive.
Placer dans le plan complexe les points A et B d'affixes respectives z_0 et z_1.

2) On considère les complexes définis par $z_2 = -4$ et $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$. Calculer le module et un argument de chacun de ces nombres. Placer, sur la même figure qu'au 1, les points C et D d'affixes respectives z_2 et z_3.

3) a) Montrer que les points A, B et C appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
   b) Montrer que D est le milieu du segment [A,C].
   c) Montrer que le triangle BDA est rectangle.
   d) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 2) (4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1cm. On considère la fonction f définie sur] -2 ; 4 [par $f(x) = a\ln(x+2) + b\ln(4-x) + c\ln 2$ où ln désigne la fonction logarithme népérien, et où a, b et c sont trois nombres réels que l'on va déterminer en utilisant des propriétés de la courbe de f.

1) Traduire par des relations entre a, b et c que:
   - la courbe passe par l'origine du repère,
   - la courbe passe par le point S de coordonnées (2 ; ln2),
   - la courbe admet en S une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

2) Déduire des trois relations obtenues au 1) les valeurs de a, b et c.

3) Résoudre dans **R** l'équation: $2\ln(2+x) + \ln(4-x) - 4\ln 2 = 0$.
Interpréter graphiquement le résultat.

Problème (12 points)

Soit f la fonction définie sur] 0, +∞ [par $f(x) = x + \dfrac{1 - \ln x}{x}$ (ln désigne la fonction logarithme népérien).

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On notera C la courbe représentative de f dans ce repère.

L'objet du problème est d'étudier la fonction f (partie B) et de tracer la courbe C (partie C), puis de calculer une aire liée à f (partie D). La partie A est consacrée à l'étude du signe d'une fonction auxiliaire.

Partie A

Soit g la fonction définie sur] 0, +∞ [par $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$

1) Déterminer le sens de variation de g.

2) Montrer que, dans l'intervalle [1,31 ; 1,32], l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique. On note α cette solution.

3) Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ pour $x < \alpha$, puis pour $x > \alpha$.

Partie B

On rappelle que f est la fonction définie sur] 0, +∞ [par $f(x) = x + \dfrac{1 - \ln x}{x}$

1) a) Déterminer la limite de f en 0

b) Déterminer la limite de f en +∞ (on pourra écrire $\dfrac{1 - \ln x}{x} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln x}{x}$)

2) Vérifier que, pour tout nombre x appartenant à] 0, +∞ [, on a $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

En déduire le signe de $f'(x)$, en utilisant les résultats de la partie A

3) On rappelle que α est le nombre tel que $g(\alpha) = \alpha^2 - 2 + \ln\alpha = 0$.

Vérifier que l'on a $f(\alpha) = 2\alpha - \dfrac{1}{\alpha}$.

4) Dresser le tableau de variation de f.

Partie C

1) a) Montrer que la droite D, d'équation $y = x$, est asymptote à la courbe C.

b) Etudier la position de C par rapport à D.

2) Soit T la tangente à C au point d'abscisse 1. Montrer que T est perpendiculaire à D et donner une équation de T.

3) Tracer les droites D et T et la courbe C. On fera figurer le point de C d'abscisse e.
On prendra 4 cm pour unité graphique.

Partie D

1) Soit F la fonction définie sur] 0, +∞ [par $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \ln x - \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.

Vérifier que F est une primitive de f sur l'intervalle] 0, +∞ [.

2) Hachurer sur la figure la partie du plan délimitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$. Calculer la valeur exacte de l'aire de cette partie, donnée en cm^2 par 16($F(e)$- $F(1)$).